INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXI. BAND · VIERTES HEFT · 1953

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 11,60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Rittnerstr. 12
Professor K. v. Sanden, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Braunschweig, Harzburger Straße 8a
Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Vertriebsvertretung im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd. 242 Marylebone Road, London, N.W. 1.

Inhalt:

Seite

Schlichting, H., Die laminare Strömung um einen axial angeströmten rotierenden Drehkörper. Mit 20 Textabbildungen 227

Söhne, W., Die Seitenstabilität eines geschleppten Flugzeuges. Mit 19 Textabbildungen 245

Kromm, A., Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik. Mit 4 Textabbildungen 266

Matthieu, P., Über die Berechnung der Hypoidgetriebe. II. Mitteilung. Mit 3 Textabbildungen 287

Richter, W., Indirekte Bestimmung von Lüfterkennlinien und Anwendungen auf die Bestimmung des natürlichen Auftriebs einer Grube. Mit 9 Textabbildungen 292

INGENIEUR-ARCHIV

XXI. BAND VIERTES HEFT 1953

Die laminare Strömung um einen axial angeströmten rotierenden Drehkörper*.

Von H. Schlichting.

1. Einleitung. Die Strömung um einen Drehkörper, der um seine Achse rotiert und gleichzeitig in Richtung der Drehachse angeströmt wird, ist von Bedeutung für die Ballistik des Geschosses mit Drall. Aber auch bei Strömungsmaschinen aller Art spielen die Strömungsvorgänge an einem angeströmten Körper, welcher gleichzeitig eine Drehbewegung ausführt, eine wichtige Rolle. Untersuchungen von *C. Wieselsberger*[1] über den Luftwiderstand von schlanken Rotationskörpern, die sich um ihre Achse drehen und dabei in Richtung der Drehachse angeströmt werden, ergaben eine beträchtliche Zunahme des Widerstandes mit dem Verhältnis von Umfangsgeschwindigkeit zu Anströmungsgeschwindigkeit, und zwar umso mehr, je schlanker der Körper ist. Ähnliche Ergebnisse erhielten *S. Luthander* und *A. Rydberg*[2] aus Versuchen an rotierenden Kugeln, die in Richtung der Drehachse angeströmt werden. Insbesondere wurde von ihnen eine beträchtliche Verschiebung der kritischen *Reynolds*schen Zahl der Kugel mit dem Verhältnis von Umfangsgeschwindigkeit zu Anströmungsgeschwindigkeit beobachtet. Die physikalische Ursache für diese Erscheinungen ist in den Vorgängen in der Reibungsschicht zu suchen, wo infolge der Drehbewegung die Flüssigkeit in Wandnähe mit umläuft und infolgedessen unter der Einwirkung einer starken Zentrifugalkraft steht. Es ist klar, daß hierdurch der Ablösungsvorgang und auch der Umschlag laminar-turbulent stark beeinflußt werden, und daß deshalb die Drehbewegung einen starken Einfluß auf den Widerstand des Körpers haben muß.

Bei den Strömungsvorgängen in der mitumlaufenden Flüssigkeitsschicht handelt es sich um recht komplizierte dreidimensionale Grenzschichtströmungen, die bisher sowohl experimentell als auch theoretisch wenig untersucht worden sind. Der Sonderfall einer in ruhender Flüssigkeit rotierenden Scheibe ist schon frühzeitig von *Th. v. Kármán*[3] für laminare und turbulente Strömung als Grenzschichtproblem nach einem Näherungsverfahren behandelt worden. Später wurde dieses Problem für den laminaren Fall von *W. G. Cochran*[4] auch als exakte Lösung der *Navier-Stokes*schen Gleichungen angegeben. Eine Verallgemeinerung dieses Falles, nämlich die Strömung um eine rotierende Scheibe, die in Richtung der Drehachse angeströmt wird, ist für laminare Strömung kürzlich von *H. Schlichting* und *E. Truckenbrodt*[5] behandelt worden. Das praktisch wichtigste Ergebnis sind hierbei die Formeln für das Drehmoment der rotierenden Scheibe; dieses hängt stark ab von dem Verhältnis der Umfangsgeschwindigkeit zur Anströmungsgeschwindigkeit der Scheibe.

Für den allgemeinen Fall eines rotierenden und gleichzeitig angeströmten Körpers sind einige allgemeine Ansätze von *J. M. Burgers*[6] angegeben worden. Wir stellen uns hier die Aufgabe, die laminare Strömung an einem axial angeströmten Drehkörper zu berechnen, der gleichzeitig um seine Achse rotiert[7]. Die oben erwähnte von uns früher schon gelöste Aufgabe

---

* Auszugsweise vorgetragen auf dem VIII. Internationalen Mechanik-Kongreß in Istanbul am 27. 8. 52.

[1] *C. Wieselsberger*, Phys. Z. **28** (1927), S. 84.

[2] *S. Luthander*, *A. Rydberg*, Phys. Z. **36** (1935), S. 552.

[3] *Th. v. Kármán*, Z. angew. Math. Mech. **1** (1921), S. 235.

[4] *W. G. Cochran*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **30** (1934), S. 365.

[5] *H. Schlichting*, *E. Truckenbrodt*, Z. angew. Math. Mech. **32** (1952), S. 97; Auszug in Journal Aeron. Sciences **18** (1951), S. 638.

[6] *J. M. Burgers*, Kon. Akad. van Wetenschappen, Amsterdam **45** (1941), S. 13.

[7] Es sei darauf hingewiesen, daß der turbulente Fall sowohl für die angeströmte rotierende Scheibe als auch für den angeströmten rotierenden Drehkörper im Anschluß an diese Untersuchungen inzwischen von *E. Truckenbrodt* gelöst worden ist. Eine Veröffentlichung wird später erfolgen. — *E. Truckenbrodt*, Die Strömung an einer angeblasenen rotierenden Scheibe bei turbulenter Strömung. Erscheint in Z. angew. Math. Mech. — *E. Truckenbrodt*, Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der Reibungsschicht an axial angeströmten rotierenden Drehkörpern, Bericht 52/20 des Institutes für Strömungsmechanik der T. H. Braunschweig (1952).

der Strömung um eine angeblasene rotierende Scheibe stellt den ersten Schritt zur Berechnung der Strömung am angeblasenen rotierenden Drehkörper dar, nämlich insofern als bei runder Nase eine kleine Umgebung des vorderen Staupunktes des Rotationskörpers durch seine Tangentialebene ersetzt werden kann.

Von unserem Problem des angeströmten rotierenden Drehkörpers bei laminarer Strömung ist der eine Grenzfall des axial angeströmten aber nicht rotierenden Körpers bekannt: Die Lösung dieses Falles wurde von *S. Tomotika*[1] angegeben durch Übertragung des bekannten Näherungsverfahrens von *K. Pohlhausen*[2] auf den rotationssymmetrischen Fall. Der andere Grenzfall, nämlich die Strömung in der Umgebung eines rotierenden, aber nicht angeblasenen Körpers ist außer für die rotierende Scheibe nur für den rotierenden Kreiszylinder bekannt[3]. Im letzteren Fall hat man eine Verteilung der Umfangsgeschwindigkeit nach dem Gesetz $v = \omega R^2/r$, wo R den Zylinderhalbmesser, r den Abstand vom Mittelpunkt und ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung bedeuten. Die Geschwindigkeitsverteilung, wie sie hier durch Reibungswirkung hervorgebracht wird, ist also die gleiche wie in der Umgebung eines Potentialwirbels. Im Gegensatz zu dem ersteren Grenzfall (angeblasener nicht rotierender Körper) hat bei schlanken Körpern, die in ruhender Flüssigkeit um ihre Längsachse rotieren, die Strömung keinen „Grenzschicht-Charakter", d.h. die Reibungswirkung beschränkt sich nicht auf eine dünne Schicht in der Nähe der Wand, sondern sie wirkt sich in der ganzen Umgebung des rotierenden Körpers aus.

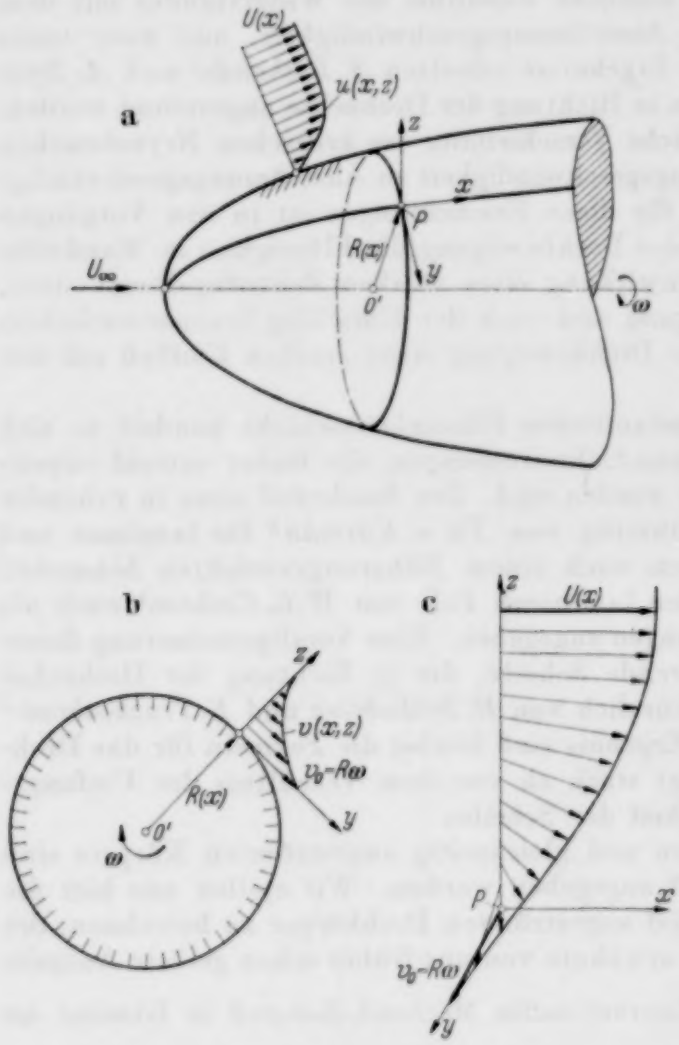

Abb. 1. Erläuterungsskizze.

In neuester Zeit ist von *L. Howarth*[4] auch ein Lösungsversuch für die in ruhender Flüssigkeit rotierende Kugel unternommen worden. Diese Strömung ist von der Art, daß in der Reibungsschicht durch die Zentrifugalkräfte die Flüssigkeit von den Polen zum Äquator gefördert wird, und in der Äquatorebene nach außen abströmt.

Wenn wir nun im folgenden den allgemeinen Fall des angeblasenen rotierenden Rotationskörpers nach den Rechenverfahren der *Prandtl*schen Grenzschicht-Theorie behandeln, so müssen wir uns dessen bewußt sein, daß diese Lösung den Grenzfall des nur rotierenden, aber nicht angeströmten Rotationskörpers nicht enthalten kann. Dies ist jedoch keine wesentliche Einschränkung, da dieser Fall praktisch nicht besonders wichtig ist.

Die beherrschende dimensionslose Größe für unser Problem ist das Verhältnis

$$\frac{\text{Umfangsgeschwindigkeit}}{\text{Anströmungsgeschwindigkeit}} = \frac{V_m}{U_\infty} = \frac{R_m\,\omega}{U_\infty},$$

wo R_m den Halbmesser des größten Spantquerschnittes des Rotationskörpers bedeuten möge. Es muß das Ziel der Rechnungen sein, für einen vorgelegten Rotationskörper das Drehmoment, den Widerstand und darüber hinaus den ganzen Grenzschichtverlauf in Abhängigkeit von V_m/U_∞ zu berechnen. Dabei ist der Fall $V_m/U_\infty = 0$ aus der bisherigen Grenzschicht-Theorie schon bekannt. Mit Rücksicht auf das oben Gesagte dürfen wir aber nicht erwarten, daß unsere Lösung für beliebig große V_m/U_∞ Gültigkeit hat. Die obere Grenze des Wertes von V_m/U_∞, für den unsere Rechnung zutreffend ist, bleibt noch zu ermitteln. Sie liegt voraussichtlich erheblich oberhalb von $V_m/U_\infty = 1$.

[1] *S. Tomotika*, Laminar boundary layer on the surface of a sphere in a uniform stream, ARC Rep. 1678 (1935).
[2] *K. Pohlhausen*, Z. angew. Math. Mech. **1** (1921), S. 253.
[3] *H. Schlichting*, Grenzschicht-Theorie. S. 63. Karlsruhe 1951.
[4] *L. Howarth*, Philos. Mag. VII Ser. **42** (1951), S. 1308.

2. Die Grundgleichungen. Für die Berechnung der Strömung legen wir das in Abb. 1 angegebene Koordinatensystem zugrunde. Es sei (x, y, z) ein rechtwinkliges krummliniges ruhendes Koordinatensystem. Die x-Achse sei gemessen längs eines Meridianschnittes, die y-Achse längs eines Breitenkreises, so daß die x- y-Ebene Tangentialebene ist. Die z-Achse ist senkrecht zur Tangentialebene. Es seien u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten in Richtung dieser drei Koordinatenachsen. Außerdem sei $R(x)$ der Halbmesser des Breitenkreises, ω die Drehwinkelgeschwindigkeit, $U(x)$ die potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung und $\nu = \mu/\varrho$ die kinematische Zähigkeit.

Die nach den Rechenmethoden der Grenzschichttheorie vereinfachten Bewegungsgleichungen lauten für dieses Koordinatensystem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{R}\frac{dR}{dx} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \text{(Kontinuität)}, \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v^2}{R}\frac{dR}{dx} + w\frac{\partial u}{\partial z} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{(Impuls, meridional)}, \tag{2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{uv}{R}\frac{dR}{dx} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \qquad \text{(Impuls, azimutal)}. \tag{3}$$

Die Randbedingungen sind

$$z = 0: u = 0, \quad v = v_0 = R\omega, \quad w = 0; \qquad z = \infty: u = U(x), \quad v = 0. \tag{4}$$

Eine Auflösung dieses Systems von Differentialgleichungen für eine beliebig vorgegebene Körperform $R(x)$ mit der dazu gehörigen potentialtheoretischen Geschwindigkeitsverteilung $U(x)$ führt auf unüberwindliche rechnerische Schwierigkeiten. Wir verwenden deshalb das bequemere Näherungsverfahren, welches mit dem Impulssatz arbeitet. Wir erhalten die beiden Impulsgleichungen für die meridionale und azimutale Richtung durch Integration der entsprechenden Bewegungsgleichungen über z von der Wand $z = 0$ bis zu einem Wandabstand $z = h > \delta$, der außerhalb der Reibungsschicht liegt.

Für die meridionale Richtung ergibt sich durch Integration von (2) über z unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung (1) sowie nach Einführung der Wandschubspannung für die x-Richtung

$$\tau_{x0} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \tag{5}$$

als Impulsgleichung für die Meridianrichtung

$$U^2\frac{d\vartheta_x}{dx} + U\frac{dU}{dx}(2\vartheta_x + \delta_x^*) + \frac{1}{R}\frac{dR}{dx}(U^2\vartheta_x + v_0^2\,\vartheta_y) = \frac{\tau_{x0}}{\varrho}. \tag{6}$$

Hierbei ist in bekannter Weise

$$\delta_x^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz \tag{7}$$

die Verdrängungsdicke, während

$$\vartheta_x = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dz, \tag{8}$$

$$\vartheta_y = \int_0^\delta \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 dz \tag{9}$$

als Impulsverlustdicken für die x- bzw. y-Richtung bezeichnet werden mögen.

In analoger Weise ergibt sich für die azimutale Richtung durch Integration von (3) über z bei Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung (1) sowie unter Einführung der Wandschubspannung für die y-Richtung

$$\tau_{y0} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 \tag{10}$$

als Impulssatz für die Umfangsrichtung

$$\omega \frac{d}{dx}(UR^3\vartheta_{xy}) = -R^2\frac{\tau_{y0}}{\varrho}. \tag{11}$$

Hierbei ist

$$\vartheta_{xy} = \int_0^\delta \frac{u}{U}\frac{v}{v_0}\,dz \tag{12}$$

als „Drehimpulsverlustdicke" eingeführt worden.

3. Näherungsverfahren. a) Die Geschwindigkeitsverteilungen. Nach dem Näherungsverfahren der Grenzschichttheorie, wie es zuerst von *Th. v. Kármán* und *K. Pohlhausen* angegeben wurde, werden die Impulsgleichungen (6) und (11) in der Weise erfüllt, daß man für die Geschwindigkeitsverteilungen u und v geeignete Ansätze macht, welche die wichtigsten Randbedingungen befriedigen. In diesen Gleichungen können im vorliegenden Fall noch zwei Größen frei bleiben, für deren Bestimmung dann die beiden Impulsgleichungen zur Verfügung stehen. Als Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung haben sich Polynome des Wandabstandes gut bewährt, derart, daß die Grenzschicht in einem endlichen Wandabstand $z = \delta$ an die reibungslose Außenströmung anschließt. Dabei kann die Grenzschichtdicke für die meridionale und die azimutale Geschwindigkeitskomponente verschieden sein. Diese Grenzschichtdicken seien δ_x bzw. δ_y, und wir führen die damit gebildeten dimensionslosen Wandabstände

$$\frac{z}{\delta_x} = t \quad \text{und} \quad \frac{z}{\delta_y} = t' \tag{13}$$

ein.

Für die Geschwindigkeitsverteilungen u und v wählen wir Polynome vierten Grades in t bzw. t'. Diese enthalten je fünf Koeffizienten, so daß wir zur Festlegung dieser Koeffizienten je fünf Randbedingungen für u und v erfüllen können. Wir wählen die folgenden zehn Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} &t = 0 : u = 0, && \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -U\frac{dU}{dx} - \frac{v_0^2}{R}\frac{dR}{dx}, \\ &t = 1 : u = U, && \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{14a, b, c, d, e}$$

$$\left.\begin{aligned} &t' = 0 : v = v_0 = R\omega, && \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \\ &t' = 1 : v = 0, && \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15a, b, c, d, e}$$

Die Randbedingungen (14a, b, c) und (15a, b, c) ergeben sich sofort aus den Grundgleichungen (2) und (3) mit (4) für $z = 0$ und $z = \delta_x$ bzw. δ_y. Die übrigen Randbedingungen dienen zur Erzielung eines sanften Überganges der Grenzschicht in die Außenströmung. Unter Beachtung dieser Randbedingungen erhält man die folgenden Polynomansätze für die Geschwindigkeitsverteilungen

$$\frac{u}{U} = 2t - 2t^3 + t^4 + K\frac{1}{6}(t - 3t^2 + 3t^3 - t^4), \tag{16}$$

$$\frac{v}{v_0} = 1 - 2t' + 2t'^3 - t'^4. \tag{17}$$

Dabei ist

$$K = \frac{\delta_x^2}{\nu}\left[\frac{dU}{dx} + \left(\frac{v_0}{U}\right)^2\frac{U}{R}\frac{dR}{dx}\right] \tag{18}$$

ein Formparameter des u-Geschwindigkeitsprofiles, der in Analogie steht zum Formparameter λ des *Pohlhausen*-Verfahrens[1]. Die Geschwindigkeitsverteilungen u/U und v/v_0 sind in Abb. 2 dargestellt.

[1] Vgl. *H. Schlichting*, Grenzschicht-Theorie, S. 193.

Die Ablösungsstelle möge durch den Beginn der Rückströmung der meridionalen Geschwindigkeitskomponente $u(z)$ in Wandnähe gegeben sein,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 .$$

Dies ergibt

$$K = -12 \quad \text{(Ablösung)} . \tag{19}$$

Der Ansatz für die u-Komponente ist der gleiche wie beim *Pohlhausen*-Verfahren des ebenen und rotationssymmetrischen Falles. Damit ist sichergestellt, daß unsere Lösung im Falle ohne Drehung, $\omega = 0$, in die Lösung von *S. Tomotika* und *F. W. Scholkemeyer*[1] für den nicht drehenden Rotationskörper übergeht. Die Einführung der Ansätze (16) und (17) in die Impulsgleichungen (6) und (11) ergibt zwei Differentialgleichungen für die noch unbekannten Grenzschichtdicken $\delta_x(x)$ und $\delta_y(x)$ oder die daraus abgeleiteten Größen.

b) Die Impulsgleichung für die Umfangsrichtung. Wir geben zunächst die weitere Ausrechnung für die Impulsgleichung der Umfangsrichtung. Mit

$$\frac{\tau_{y\vartheta}}{\varrho} = \nu\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 = -2\frac{v}{\delta_y} R\omega \tag{20}$$

ergibt sich aus (11) nach Division durch ω

$$\frac{d}{dx}\left\{R^3 \cdot U \cdot \vartheta_{xy}\right\} = 2\frac{\nu}{\delta_y} R^3 . \tag{21}$$

Unter Einführung der weiteren Größen

$$g_0 = \frac{\vartheta_{xy}}{\delta_y} \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{\delta_y}{\delta_x} \tag{22}$$

sowie

$$\Theta = \frac{\vartheta_{xy}^2}{\nu} \tag{23}$$

und

$$\sigma = \Theta\left(\frac{dU}{dx} + 3\frac{U}{R}\frac{dR}{dx}\right) \tag{24}$$

erhält man aus (21) die folgende Differentialgleichung für $\Theta(x)$:

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{G(K, \Delta)}{U} . \tag{25}$$

Dabei ist

$$G(K, \Delta) = 4g_0 - 2\sigma \tag{26}$$

eine universelle Funktion der beiden Parameter K und Δ.

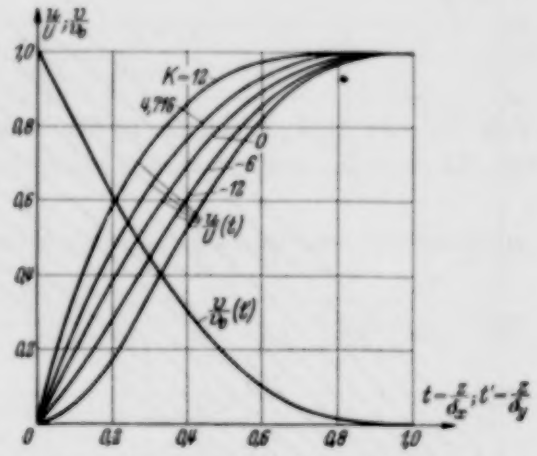

Abb. 2. Die Geschwindigkeitsverteilungen in meridionaler und azimutaler Richtung.

Diese Funktion ist schon von *W. Dienemann*[2] bei der Berechnung der Temperaturgrenzschicht an einem Zylinder (ebenes Problem) ermittelt worden[3]. Es wurde dort für die Temperaturverteilung in der Grenzschicht das gleiche Polynom vierten Grades gewählt wie bei uns für die azimutale Geschwindigkeitsverteilung nach (17). Nach (12) ist

$$g_0 = \frac{\vartheta_{xy}}{\delta_y} = \int_0^1 \frac{u}{U}\frac{v}{v_0}\, dt' .$$

Wegen

$$t = \frac{z}{\delta_x} = \frac{z}{\delta_y}\frac{\delta_y}{\delta_x} = t'\Delta$$

---

[1] *F. W. Scholkemeyer*, Die laminare Reibungsschicht an rotationssymmetrischen Körpern. Dissertation Braunschweig 1943, vgl. *H. Schlichting*, Grenzschicht-Theorie, S. 204.

[2] *W. Dienemann*, Berechnung des Wärmeüberganges an laminar umströmten Körpern mit konstanter und ortsveränderlicher Wandtemperatur. Dissertation Braunschweig (1951), Z. angew. Math. Mech. **33**, 1953, S. 89.

[3] Mit den Bezeichnungen nach *W. Dienemann* gelten die Identitäten $H_t \equiv g_0$ und $\Lambda \equiv K$.

erhält man nach Ausrechnung des Integrales mit den Geschwindigkeitsverteilungen (16) und (17) die Größe g_0 als Funktion von K und Δ. Es ergibt sich nach *W. Dienemann*

$$g_0(K, \Delta) = g_1(\Delta) + K\, g_2(\Delta) \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta \leq 1: g_1(\Delta) &= \frac{2}{15}\Delta - \frac{3}{140}\Delta^3 + \frac{1}{180}\Delta^4, \\ g_2(\Delta) &= \frac{1}{90}\Delta - \frac{1}{84}\Delta^2 + \frac{3}{560}\Delta^3 - \frac{1}{1080}\Delta^4, \\ \Delta \geq 1: g_1(\Delta) &= \frac{3}{10} - \frac{3}{10}\frac{1}{\Delta} + \frac{2}{15}\frac{1}{\Delta^2} - \frac{3}{140}\frac{1}{\Delta^4} + \frac{1}{180}\frac{1}{\Delta^5}, \\ g_2(\Delta) &= \frac{1}{120}\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{180}\frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{840}\frac{1}{\Delta^4} - \frac{1}{3024}\frac{1}{\Delta^5}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Die Funktion $g_0\Delta$ in Abhängigkeit von Δ für verschiedene Werte von K ist in Abb. 3 dargestellt. Tabelle 1 gibt einige Zahlenwerte der Funktionen $g_1(\Delta)$ und $g_2(\Delta)$.

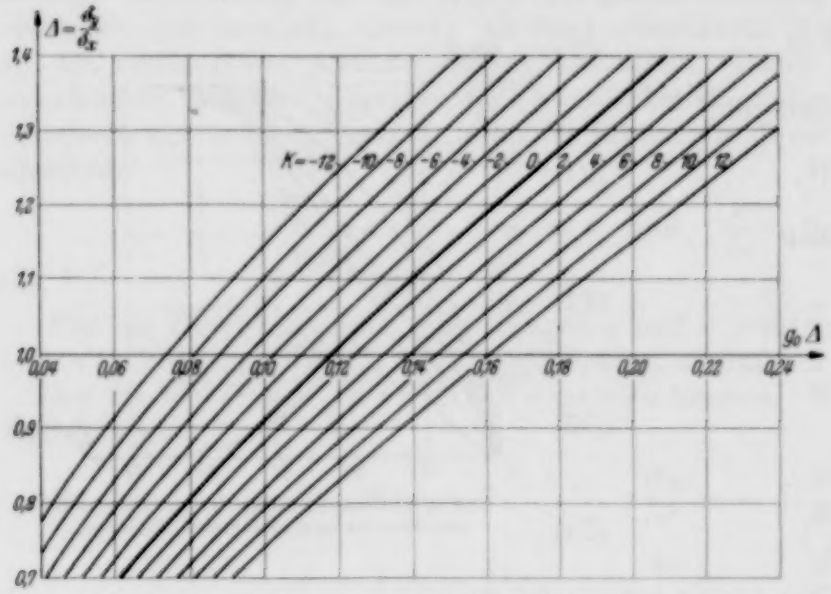

Abb. 3. Die universelle Funktion $\Delta = \delta_y/\delta_x$ in Abhängigkeit von $g_0 \cdot \Delta = \delta_{x\,y}/\delta_x$ nach (27) und (28).

Tabelle 1. *Die universellen Funktionen $g_1\Delta$ und $g_2\Delta$ nach Gleichung (28).*

Δ	$g_1 \cdot \Delta$	$100 \cdot g_2 \cdot \Delta$
0	0	0
0,2	0,0053	0,036
0,4	0,0208	0,114
0,6	0,0457	0,205
0,7	0,0606	0,249
0,8	0,0784	0,291
0,9	0,0970	0,329
1,0	0,1175	0,364
1,2	0,1614	0,423
1,4	0,2089	0,471
1,6	0,2589	0,510
1,8	0,3109	0,541
2,0	0,3643	0,568
2,5	0,5021	0,618
3,0	0,6437	0,651

c) Die Impulsgleichung für die Meridianrichtung. Die weitere Umformung der Impulsgleichung für die Meridianrichtung liefert, wenn man nach *Holstein-Bohlen*[1] und analog zu (23)

$$Z = \frac{\vartheta_x^2}{\nu}, \qquad \varkappa = Z\frac{dU}{dx} \tag{29}$$

einführt, die folgende Differentialgleichung für $Z(x)$:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(K, \Delta)}{U}. \tag{30}$$

Dabei ist

$$F(K, \Delta) = 2\left\{f_3 - (2\varkappa + \varkappa f_2) - Z\frac{U}{R}\frac{dR}{dx}\left[1 + \left(\frac{v_0}{U}\right)^2 \frac{h_0}{f_0}\Delta\right]\right\} \tag{31}$$

genau so wie $G(K, \Delta)$ in (26) eine universelle Funktion der beiden Parameter K und Δ. Im Einzelnen gelten die folgenden Beziehungen:

$$f_0(K) = \frac{\vartheta_x}{\delta_x} = \frac{37}{315} - \frac{K}{945} - \frac{K^2}{9072}, \tag{32}$$

$$f_1(K) = \frac{\delta_x^*}{\delta_x} = \frac{3}{10} - \frac{K}{120}, \tag{33}$$

[1] Vgl. *H. Schlichting*, Grenzschicht-Theorie, S. 195.

$$f_2(K) = \frac{\delta_x^*}{\vartheta_x} = \frac{f_1(K)}{f_0(K)}, \tag{34}$$

$$\frac{\Delta}{f_0(K)} = \frac{\delta_y}{\delta_x}\frac{\delta_x}{\vartheta_x} = \frac{\delta_y}{\vartheta_x}, \tag{35}$$

$$f_3(K) = \frac{\tau_{x0}}{\mu}\frac{\vartheta_x}{U} = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \frac{\delta_x}{U}\frac{\vartheta_x}{\delta_x} = \left(2 + \frac{K}{6}\right) f_0(K), \tag{36}$$

$$h_0 = \frac{\vartheta_y}{\delta_y} = \frac{23}{126}. \tag{37}$$

Die vorstehenden Funktionen von K sind bereits aus der Berechnung der Grenzschicht des ebenen Falles bekannt[1].

Der Zusammenhang zwischen Z und K ergibt sich aus (18) unter Beachtung von (29) und (32) zu

$$K \cdot f_0^2(K) = Z\left[\frac{dU}{dx} + \left(\frac{v_0}{U}\right)^2 \frac{U}{R}\frac{dR}{dx}\right]. \tag{38}$$

Unter Berücksichtigung von $\varkappa = Z\,U'$ nach (29) kann dies wegen (32) auch geschrieben werden in der Form

$$\varkappa\left[1 + \left(\frac{v_0}{U}\right)^2 \frac{U}{R}\frac{R'}{U'}\right] = \varkappa^* = K\left(\frac{37}{315} - \frac{K}{945} - \frac{K^2}{9072}\right)^2. \tag{39}$$

In Abb. 4 sind die universellen Funktionen f_0, f_2, f_3 und K in Abhängigkeit von $\varkappa^*$ dargestellt. Im Ablösungspunkt ist für beliebige Drehgeschwindigkeit wegen $K = -12$ der Parameter $\varkappa^* = -0{,}1567$. Im Staupunkt ist ohne Drehung $K = 4{,}710$ und $\varkappa^* = 0{,}05708$, während mit Drehung die Werte im Staupunkt vom Drehparameter v_0/U abhängig sind (vgl. den folgenden Abschnitt). Aus (38) läßt sich bei gegebenem Z der Formparameter K ermitteln. Ferner benötigen wir für die spätere Rechnung noch einen Zusammenhang zwischen den Parametern Δ, g_0, Θ, Z und K. Dieser ergibt sich nach (22), (23), (29) und (32) folgendermaßen:

$$\Delta \cdot g_0(K, \Delta) = \sqrt{\frac{\Theta}{Z}}\, f_0(K). \tag{40}$$

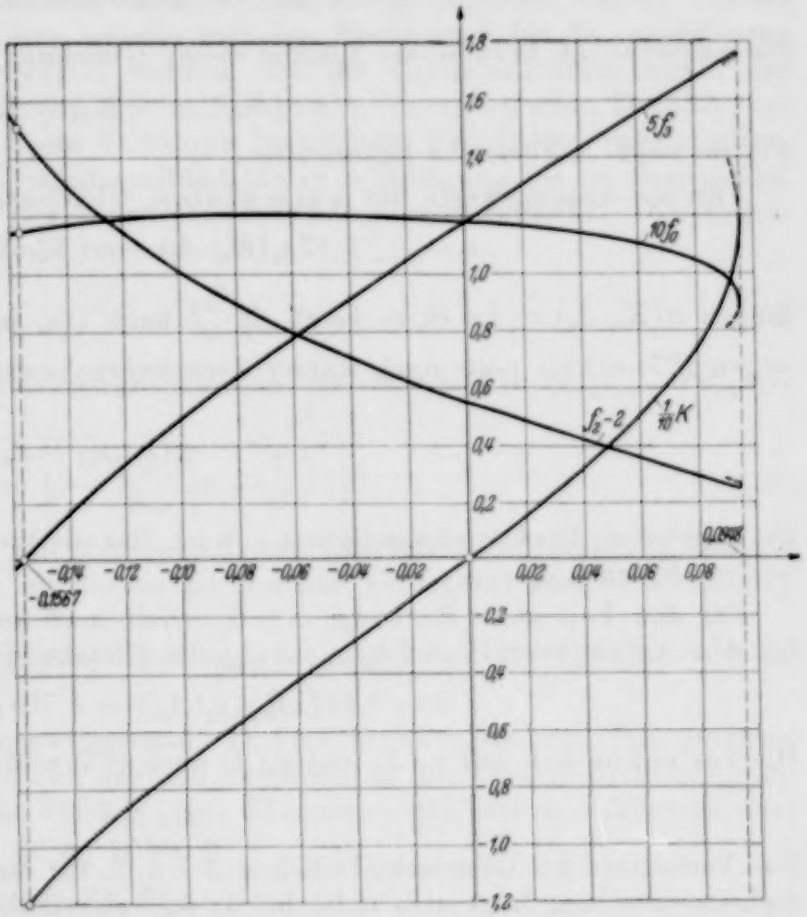

Abb. 4. Die universellen Funktionen $f_0 = \vartheta_x/\delta_x$, $f_2 = \delta_x^*/\vartheta_x$, $f_3 = \frac{\tau_{x0}}{\mu}\frac{\vartheta_x}{U}$ und K in Abhängigkeit von $\varkappa^*$ nach (32) bis (39).

Die beiden Differentialgleichungen (25) für $\Theta(x)$ und (30) für $Z(x)$ sind zwei simultane Differentialgleichungen, die durch die universellen Funktionen $G(K, \Delta)$ und $F(K, \Delta)$ gekoppelt sind. Im Falle des nicht rotierenden Körpers, $v_0 = 0$, fällt die Kopplung fort, da dann nach (31) die Funktion F unabhängig von Δ wird und nur noch von K abhängt. In diesem Fall kann zuerst aus (30) $Z(x)$ ermittelt werden, und dann nachträglich aus (25) $\Theta(x)$. Diese Lösung für Θ hat allerdings keine physikalische Bedeutung. Sie dient lediglich dazu, den Grenzwert für verschwindende Umdrehungsgeschwindigkeit zu geben.

d) Die Anfangswerte im Staupunkt. Im Staupunkt, wo $U = 0$ ist, besitzen die beiden Differentialgleichungen (25) und (30) eine singuläre Stelle, da in beiden Gleichungen auf der rechten Seite der Nenner verschwindet. Um im Staupunkt endlich große Anfangs-

[1] Vgl. *H. Schlichting*, Grenzschicht-Theorie. Kap. XII.

steigungen $d\Theta/dx$ und dZ/dx zu erhalten, müssen auch die Zähler in diesen beiden Gleichungen für den Staupunkt verschwinden. Diese Forderung liefert die Anfangswerte der Parameter K_0 und Δ_0 im Staupunkt. Für die Potentialströmung gilt im Staupunkt

$$x \to 0 : U(x) = U_0' R = aR , \qquad \frac{dR}{dx} = 1 . \tag{41}$$

Die Anfangswerte der meridionalen Gleichung erhält man aus $F=0$ nach (31) zu

$$f_{30} - 2\varkappa_0 - \varkappa_0 f_{20} - \varkappa_0 \left[1 + \frac{h_0}{f_{00}} \Delta_0 \left(\frac{\omega}{a}\right)^2\right] = 0 .$$

Mit $K_0 f_{00}^2 = \varkappa_0 \left[1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2\right]$ nach (38), mit $f_{30} = f_{00}\left(2 + \frac{K_0}{6}\right)$ nach (36) und h_0 nach (37) ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\frac{K_0}{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2} = \frac{2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{23}{126}\Delta_0\right) K_0}{\frac{137}{210} - \frac{29}{2520} K_0 - \frac{1}{3024} K_0^2 - \frac{23}{126}\Delta_0} . \tag{42}$$

Bei gegebener Drehgeschwindigkeit ω/a ist dies die erste Gleichung zwischen den Anfangswerten K_0 und Δ_0. Für den Fall ohne Drehung, $\omega = 0$, fällt das Grenzschichtdickenverhältnis Δ_0 aus dieser Gleichung heraus, und es verbleibt eine Gleichung für den Anfangswert K_0 allein, welche lautet

$$2 + \frac{51}{105} K_0 + \frac{29}{2530} K_0^2 + \frac{1}{3024} K_0^3 = 0 . \tag{43}$$

Die physikalisch brauchbare Lösung dieser Gleichung ist

$$(K_0)_{\omega=0} = K_{00} = 4{,}716 , \tag{44}$$

wie sie nach *S. Tomotika* bekannt ist.

Für die Anfangswerte der azimutalen Gleichung erhält man aus $G=0$ nach (26)

$$2 g_0(K_0, \Delta_0) - \sigma(K_0, \Delta_0) = 0 .$$

Wegen $\sigma(K_0, \Delta_0) = 4 a \Theta_0 = 4 a g_{00}^2 \Delta_0^2 \frac{\delta_{x0}^2}{\nu}$ nach (24) und $K_0 = \frac{a \delta_{x0}^2}{\nu}\left[1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2\right]$ nach (18) und wegen (27) erhält man nach kurzer Zwischenrechnung

$$\frac{K_0}{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2} = \frac{1}{2\,[g_1(\Delta_0) + K_0 g_2(\Delta_0)]\,\Delta_0^2} . \tag{45}$$

Bei gegebener Drehgeschwindigkeit ω/a ist dies die zweite Gleichung zwischen den Anfangswerten K_0 und Δ_0.

Für den Fall ohne Drehung, $\omega = 0$, erhält man aus (45) mit $K_0 = K_{00} = 4{,}716$ nach (44) für den Anfangswert von $(\Delta_0)_{\omega=0} = \Delta_{00}$ die Gleichung

$$1 - 9{,}432\, \Delta_{00}^2 \,[g_1(\Delta_{00}) + 4{,}716\, g_2(\Delta_{00})] = 0 . \tag{46}$$

Hieraus ergibt sich mit $g_1(\Delta)$ und $g_2(\Delta)$ nach (27) und (28)

$$\Delta_{00} = 0{,}915 . \tag{47}$$

Das Verhältnis der Grenzschichtdicken $\Delta = \delta_y/\delta_x$ für die azimutale und meridionale Geschwindigkeitsverteilung liegt also nahe bei 1, was physikalisch plausibel ist.

Die beiden Gleichungen (42) und (45) stellen jetzt bei vorgegebener Drehwinkelgeschwindigkeit ω/a zwei Gleichungen für die Anfangswerte K_0 und Δ_0 dar. Die Auflösung wurde so vorgenommen, daß aus beiden Gleichungen die Funktion $K_0 \Big/ \left[1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2\right]$ in Abhängigkeit von Δ_0 bei verschiedenen festen Werten K_0 ermittelt wurde. Hieraus ergeben sich dann die in Tab. 2 angegebenen Anfangswerte. Sie sind in Abb. 5 in Abhängigkeit von ω/a dargestellt. Dabei wurde gefunden, daß für Werte von $\omega/a > 0{,}815$ keine brauchbaren Anfangswerte K_0 und Δ_0 mehr existieren, d.h. daß unser Verfahren für diese größeren Werte von ω/a also versagt. Dabei fällt die Grenze, jenseits welcher unser Rechenverfahren versagt, mit dem

Wert $K = 12$ des Formparameters zusammen[1]. Die aus den Anfangswerten K_0 und Δ_0 ermittelten Anfangswerte $\varkappa_0$, $\varkappa_0^*$ und g_{00} sind in Abhängigkeit von ω/a in Abb. 5 und Tabelle 2 dargestellt.

Tabelle 2. *Anfangswerte im Staupunkt.*

$\frac{\omega}{a}$	K_0	Δ_0	$100 \cdot \varkappa_0$	$100 \cdot \varkappa_0^*$	$\frac{1}{2} g_{00}$
0	4,716	0,915	5,71	5,71	0,0629
0,221	5	0,908	5,71	5,99	0,0632
0,454	6	0,882	5,70	6,89	0,0640
0,679	8	0,838	5,69	8,32	0,0651
0,785	10	0,781	5,69	9,19	0,0661
0,815	12	0,726	5,69	9,49	0,0664

Schließlich erhalten wir den Anfangswert für Z einfach in folgender Weise mit $U_0' = a$:

$$Z_0 = \frac{\varkappa_0}{a}. \tag{48}$$

Der Anfangswert für Θ ergibt sich mit $\sigma_0 = 2 g_{00}$ nach (24) zu

$$\Theta_0 = \frac{1}{2} \frac{g_{00}}{a}. \tag{49}$$

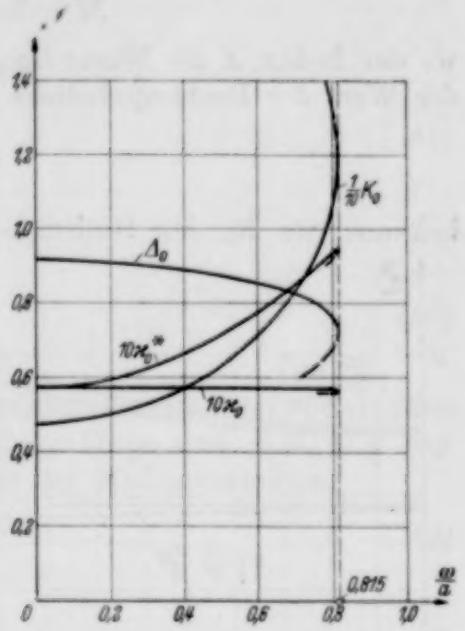

Abb. 5. Die Anfangswerte im Staupunkt Δ_0, K_0, $\varkappa_0$ und $\varkappa_0^*$.

Der hier verwendete Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung (Parabel vierten Grades für u und v) ist verschieden von demjenigen unserer früheren Rechnung[2] für die angeblasene rotierende Scheibe. Es muß jedoch erwartet werden, daß die Grenzschichtparameter der angeblasenen rotierenden Scheibe mit denjenigen im Staupunkt des rotierenden Drehkörpers näherungsweise übereinstimmen, wenn beide Verfahren brauchbare Ergebnisse liefern sollen. Wir geben diesen Vergleich an für die Impulsverlustdicke in x-Richtung (8) im Staupunkt, sowie für die meridionale Komponente der Wandschubspannung im Staupunkt. Die dimensionslose Impulsverlustdicke im Staupunkt ist nach (29) mit $U_{x=0}' = a$

$$\vartheta_{x0} \sqrt{\frac{a}{\nu}} = \sqrt{\varkappa_0}. \tag{50}$$

Die meridionale Komponente der Wandschubspannung im Staupunkt $(\tau_{x0})_{x=0} = \tau_{r0}$ ist nach (5), (16) und (32)

$$\frac{\tau_{r0}}{\varrho U^2} \sqrt{\frac{UR}{\nu}} = \sqrt{\frac{\nu}{a}} \frac{f_0(K_0)}{\vartheta_{x0}} \left[2 + \frac{1}{6} K_0\right]. \tag{51}$$

Die hiernach errechneten Werte sind mit denjenigen der rotierenden Scheibe in Abb. 6 verglichen[3]. Die Übereinstimmung ist bis an die Grenze der Gültigkeit unserer Rechnung ($\omega/a = 0{,}815$) recht gut.

Wir schließen daraus, daß unsere vorliegende Rechnung im gesamten Bereich $0 \leq \omega/a \leq 0{,}815$ befriedigende Ergebnisse liefert.

4. Das Drehmoment und der Reibungswiderstand. a) Das Drehmoment. Das gesamte Drehmoment des Rotationskörpers läßt sich aus den Ergebnissen der Grenzschichtrechnung leicht in folgender Weise ermitteln: Der Beitrag eines Elementes des Rotationskörpers vom Halbmesser $R(x)$ und der Bogenlänge dx ist (Abb. 7)

$$dM = -2\pi R^2 \tau_{y0} \, dx,$$

und somit das gesamte Drehmoment

$$M = -2\pi \int_0^{x_A} \tau_{y0} R^2 \, dx, \tag{52}$$

[1] Für $K > 12$ ergeben sich Geschwindigkeitsprofile mit $u/U > 1$, die an sich wegen der Wirkung der Zentrifugalkräfte im vorliegenden Fall durchaus möglich sind.

[2] Siehe Fußnote 5 von S. 227.

[3] Während die Werte für die Wandschubspannung unmittelbar aus der Arbeit in Fußnote 5 S. 227, Tab. 2, entnommen werden konnten, wurden die Werte für die Impulsverlustdicke unter Anwendung der Gl. (8) mit den dort angegebenen Geschwindigkeitsverteilungen nachträglich berechnet.

wo x_A die Bogenlänge vom Staupunkt bis zum Ablösungspunkt bedeutet. Unter Berücksichtigung des Impulssatzes für die Umfangsrichtung (11) wird

$$M = 2\pi\varrho\omega\,[R^3\,U\,\vartheta_{xy}]_0^{x_A} = 2\pi\varrho\,R_A^3\,U_A\,\vartheta_{xyA}\,, \tag{53}$$

wo der Index A die Werte im Ablösungspunkt bedeutet. Aus der Grenzschichtrechnung ist der Wert der Drehimpulsdicke im Ablösungspunkt in der dimensionslosen Form

$$\frac{\vartheta_{xyA}}{R_m}\sqrt{\frac{U_\infty R_m}{\nu}} = B \tag{54}$$

bekannt, wo R_m den Halbmesser des Hauptspantquerschnittes bedeuten möge.

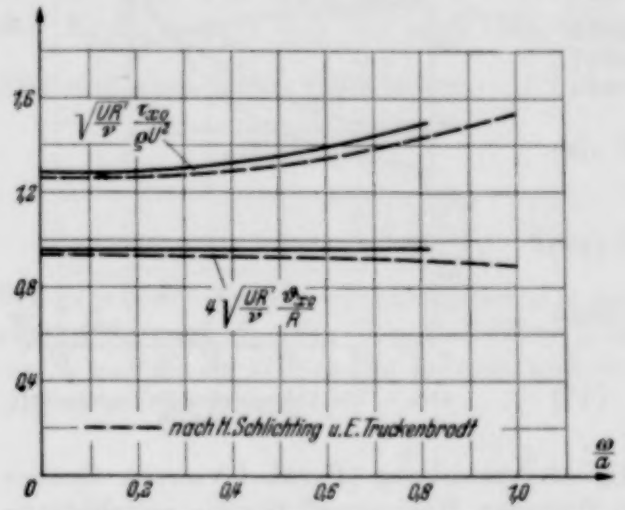

Abb. 6. Die Impulsverlustdicke ϑ_x und die Wandschubspannung τ_{x0} im Staupunkt. Vergleich mit den Werten der angeblasenen rotierenden Scheibe nach *H. Schlichting* und *E. Truckenbrodt*.

Führt man in gleicher Weise wie bei der rotierenden Scheibe einen dimensionslosen Drehmomentenbeiwert ein durch

$$c_M = \frac{M}{\frac{\varrho}{2}\,\omega^2\,R_m^5}\,, \tag{55}$$

so wird

$$\frac{V_m}{U_\infty}\sqrt{\frac{U_\infty R_m}{\nu}}\,c_M = 4\,\pi\,B\left(\frac{R_A}{R_m}\right)^3\frac{U_A}{U_\infty}\,. \tag{56}$$

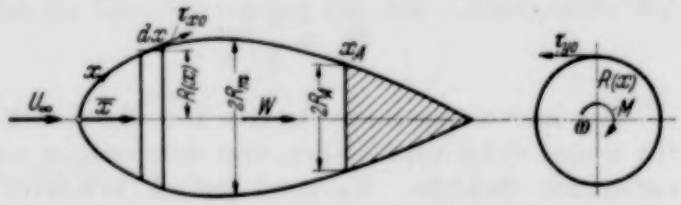

Abb. 7. Skizze zur Berechnung des Drehmomentes und des Reibungswiderstandes.

Dabei ist $V_m = R_m \cdot \omega$ die Umfangsgeschwindigkeit des Hauptspantquerschnittes. Da sich die dimensionslose Drehimpulsdicke B im Ablösungspunkt, wie die durchgerechneten Beispiele zeigen, nur wenig mit V_m/U_∞ ändert, ist c_M in erster Näherung proportional zu U_∞/V_m und umgekehrt proportional zu der *Reynolds*schen Zahl $\sqrt{U_\infty R_m/\nu}$.

Für den Fall der angeblasenen rotierenden Scheibe vom Halbmesser $R_m = R$ erhält man wegen $R_A = R$, $U_A = aR$ aus (56) in Verbindung mit (54)

$$\sqrt{\frac{R^2\omega}{\nu}}\,c_M = 4\,\pi\,\vartheta_{xy}\sqrt{\frac{a}{\nu}}\sqrt{\frac{a}{\omega}} \tag{57}$$

und mit dem Zahlenwert $\sqrt{\frac{a}{\nu}}\,\vartheta_{xy} = \left(\sqrt{\frac{g_{00}}{2}}\right)_{\omega/a=0} = 0{,}251$ nach (49)

$$\sqrt{\frac{R^2\omega}{\nu}}\,c_M = 3{,}15\sqrt{\frac{a}{\omega}}$$

in sehr guter Übereinstimmung mit der früheren Untersuchung[1], wo der Zahlenwert 3,17 lautet.

b) Der Reibungswiderstand. Der Reibungswiderstand des drehenden Rotationskörpers läßt sich durch Integration der Wandschubspannungskomponenten τ_{x0} bestimmen. Ein Oberflächenringelement des Rotationskörpers vom Halbmesser $R(x)$ und der Bogenlänge dx (Abb. 7) liefert den Widerstand

$$dW = 2\,\pi\,R\,\tau_{x0}\,d\bar{x}\,. \tag{58}$$

Dabei ist $\bar{x}$ die längs der Körperachse gemessene Koordinate. Die Integration vom Staupunkt $x = 0$ bis zum Ablösungspunkt $\bar{x}_A$, wo $\tau_{x0} = 0$ ist, liefert

$$W = 2\,\pi\int_0^{\bar{x}_A}\tau_{x0}\,R\,d\bar{x}\,. \tag{59}$$

Wir wollen den Widerstand auf die Hauptspantfläche πR_m^2 beziehen und definieren den

[1] Vgl. Fußnote 5 von Seite 227, Gleichung (49a).

Widerstandsbeiwert

$$c_w = \frac{W}{\frac{\varrho}{2} U_\infty^2 \pi R_m^2}. \tag{60}$$

Da wir die Wandschubspannung in der dimensionslosen Form

$$\frac{\tau_{x0}}{\varrho U_\infty^2} \sqrt{\frac{U_\infty R_m}{\nu}} = T \tag{61}$$

erhalten, können wir für den Widerstandsbeiwert schreiben:

$$\sqrt{\frac{U_\infty R_m}{\nu}}\, c_w = 4 \int_0^{\bar{x}_A/R_m} T \frac{R}{R_m}\, d\frac{\bar{x}}{R_m}. \tag{62}$$

5. Beispiele. a) Kugel. Als erstes Beispiel wurde die Reibungsschicht an der rotierenden Kugel gerechnet. Wenn R_m den Kugelhalbmesser, x die Bogenlänge und $x/R_m = \varphi$ den vom Staupunkt aus gemessenen Zentriwinkel bedeutet, so ist die Radiusverteilung

$$R(x) = R_m \sin\varphi \tag{63}$$

und die potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung

$$U(x) = \frac{3}{2} U_\infty \sin\varphi. \tag{64}$$

Der Geschwindigkeitsgradient im Staupunkt ist

$$a = \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=0} = \frac{3}{2}\frac{U_\infty}{R_m}$$

und somit

$$\left(\frac{V_m}{U_\infty}\right)_0 = \frac{\omega R_m}{U_\infty} = \frac{3}{2}\frac{\omega}{a}. \tag{65}$$

Da nach den Ausführungen von Ziff. **3** die Rechnung nur für $\omega/a \leq 0{,}815$ ausgeführt werden kann, müssen wir uns also auf $V_m/U_\infty \leq \frac{3}{2}\,0{,}815 = 1{,}22$ beschränken.

Die Lösungen wurden erhalten durch numerische Integration der beiden simultanen Differentialgleichungen (25) und (30) für die beiden Fälle $V_m/U_\infty = 0$ und 1. Das Rechenschema ist in Tabelle 3 angegeben. Die Ergebnisse für weitere Werte von V_m/U_∞ konnten hieraus in bequemer Weise durch Interpolation erhalten werden. Der Fall $V_m/U_\infty = 0$ (nicht

Tabelle 3. *Rechenschema für die Lösung der beiden simultanen Differentialgleichungen (25) und (30).*

ω gegeben						Z_ν	$\varkappa$	$\varkappa^*$	K	f_0	f_2	f_3
φ	x	$R(x)$	$\frac{dR}{dx} = R'$	$U(x)$	$\frac{dU}{dx} = U'$	$v_0 = \omega R$							
						Anfangswert gegeben Gl.(48)	$= Z \cdot U'$	Gl.(39)	Bild 4 Anfangswert Tab. 2	Bild 4	Bild 4	Bild 4
← Körperform und Potentialströmung gegeben →						← zeilenweise zu berechnen →						

Θ_ν	$2 \cdot \sigma$	$g_0 \cdot \Delta$	Δ	$4 \cdot g_0$	$\left(\frac{v_0}{U}\right)^2 \frac{h_0}{f_0} \Delta$	F	$\frac{dZ}{dx}$	ΔZ	$Z_{\nu+1}$	G	$\frac{d\Theta}{dx}$	$\Delta\Theta$	$\Theta_{\nu+1}$
Anfangswert Gl. (49)	Gl. (24)	Gl. (40)	Bild 3	$4\frac{g_0 \Delta}{\Delta}$	$h_0 = \frac{23}{126}$	Gl. (31)	Gl. (30)			Gl. (26)	Gl. (25)		
← zeilenweise zu berechnen. →													

$$\Delta Z = \Delta x \cdot \frac{dZ}{dx}; \qquad Z_{\nu+1} = Z_\nu + \Delta Z \qquad \Delta\Theta = \Delta x \cdot \frac{d\Theta}{dx}; \qquad \Theta_{\nu+1} = \Theta_\nu + \Delta\Theta.$$

drehende Kugel) stimmt mit dem von *Scholkemeyer*[1] überein. Die Ergebnisse der Rechnung sind in Tabelle 4 und Abb. 8 bis 12 dargestellt. Abb. 8 gibt den Verlauf des Formparameters K der meridionalen Komponente der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht. Die Anfangswerte K_0 im Staupunkt sind in Tabelle 2 mit Gleichung (65) sofort gegeben. Im Geschwindigkeitsmaximum, $\varphi = 90°$, ist nach (18) $K = 0$ für alle V_m/U_∞, weil bei der Kugel an der Stelle, wo $dU/dx = 0$ ist, auch $dR/dx = 0$ ist. Der Wert $K = -12$ gibt die Lage des Ablösungspunktes A. In Abb. 8 ist ebenfalls der Verlauf des Grenzschichtdickenverhältnisses $\Delta = \delta_y/\delta_x$ aufgetragen; es liegt immer nahe bei 1 und ändert sich auch nur wenig mit V_m/U_∞. Abb. 9 zeigt den Verlauf der Drehimpulsdicke ϑ_{xy}. Die Kurven

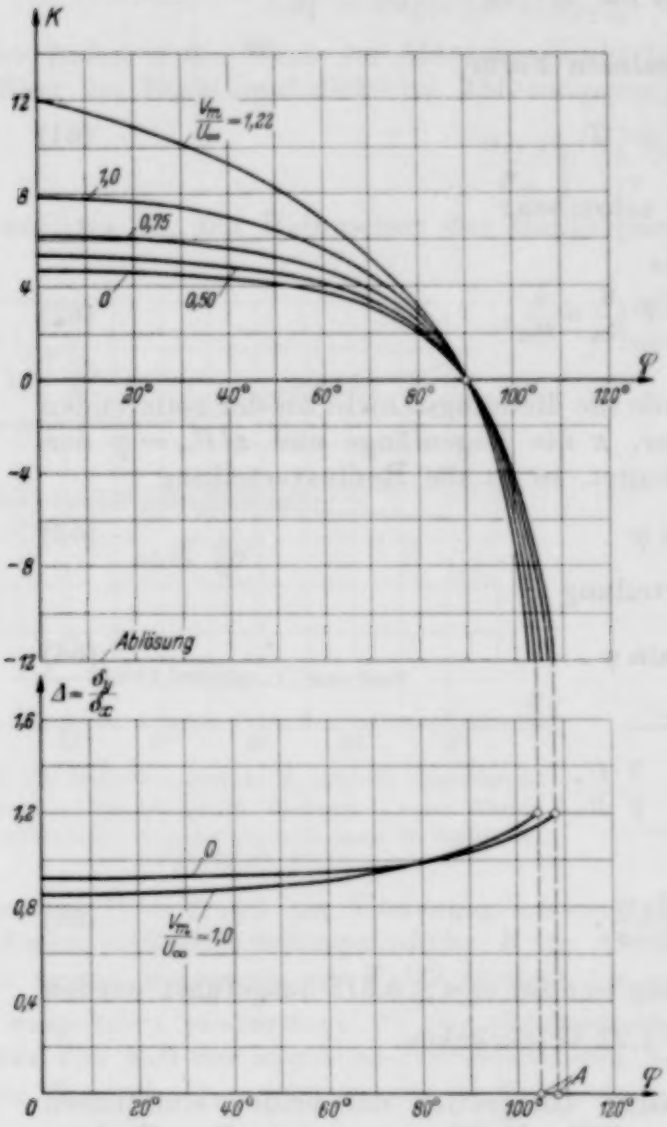

Abb. 8. Der Formparameter K und das Grenzschichtdickenverhältnis $\Delta = \delta_y/\delta_x$ für die angeblasene rotierende Kugel bei verschiedenen Drehparametern V_m/U_∞.

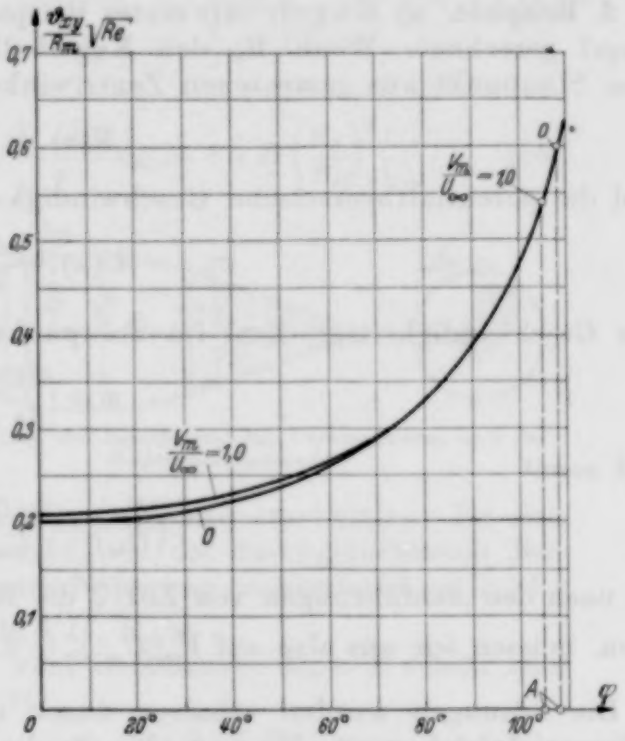

Abb. 9. Die Drehimpulsverlustdicke ϑ_{xy} für die angeblasene rotierende Kugel. $Re = U_\infty R_m/\nu$.

Tabelle 4. *Die Lage des Ablösungspunktes und des Drehmomentes in Abhängigkeit von V_m/U_∞ für die angeblasene rotierende Kugel.*

Drehparameter $\frac{V_m}{U_\infty}$	Ablösungspunkt φ_A^0	Drehmoment $\frac{V_m}{U_\infty}\sqrt{\frac{U_\infty R_m}{\nu}}\,c_M$
0	108,2	9,15
0,25	108,0	9,14
0,50	107,3	9,06
0,75	106,2	9,03
1,00	104,9	8,95
1,22	103,5	8,85

für verschiedene V_m/U_∞ fallen nahezu zusammen. Dasselbe gilt auch für die Impulsverlustdicke ϑ_x und die Reibungsschichtdicken δ_x und δ_y. Abb. 10 bringt den Verlauf der meridionalen und azimutalen Komponente der Wandschubspannung. Die meridionale Komponente τ_{x0} wächst mit dem Drehbeiwert V_m/U_∞ nur wenig an, während die azimutale Komponente τ_{y0} in erster Näherung dem Drehbeiwert V_m/U_∞ proportional ist. Die Lage des Ablösungspunktes in Abhängigkeit vom Drehbeiwert V_m/U_∞ ist in Tab. 4 angegeben. Für die nicht drehende Kugel ist $\varphi_A = 108{,}2°$ und für $V_m/U_\infty = 1{,}22$ rückt der Ablösungspunkt auf $\varphi_A = 103{,}5°$ nach vorn. Diese Verschiebung des Ablösungspunktes infolge der Drehung ist auf die Wirkung der Zentrifugalkräfte zurückzuführen und anschaulich sofort plausibel: Für die Geschwindigkeitsprofile hinter der Äquatorebene ($\varphi > 90°$) wirken die Zentrifugalkräfte wie ein zusätzlicher Druckanstieg in Strömungsrichtung, und sie bewirken deshalb eine Verschiebung des Ablösungspunktes nach vorn. In Abb. 11 ist der nach Gl. (56) gebildete dimensionslose Drehmomentenbeiwert in Abhängigkeit vom Drehbeiwert V_m/U_∞ dargestellt

[1] Fußnote 1 von Seite 231.

(vgl. Tabelle 4). Man sieht, daß die Proportionalität mit V_m/U_∞ mit sehr guter Näherung erfüllt ist. Schließlich zeigt noch Abb. 12 einige bildlich dargestellte Geschwindigkeitsprofile.

Für den Vergleich der theoretischen Rechnung mit Versuchsergebnissen ist die Kugel ziemlich ungeeignet wegen des großen Totwassers, welches bewirkt, daß schon im Fall der nicht drehenden Kugel die Lage des Ablösungspunktes nach der Theorie und Messung nicht übereinstimmt, wenn man der Grenzschichtrechnung die potentialtheoretische Druckverteilung zugrunde legt, wie wir es hier getan haben. Ein stichhaltiger Vergleich über den Einfluß der Rotation auf das Verhalten der Reibungsschicht kann nur an einem schlanken Körper ausgeführt werden, bei welchem sich kein nennenswertes Totwasser ausbildet. Trotzdem mögen die Meßergebnisse von *S. Luthander* und *A. Rydberg*[1] hier angeführt werden. In Abb. 13 ist nach diesen Messungen der Widerstandsbeiwert der Kugel in Abhängigkeit von der *Reynolds*schen Zahl *Re* für verschiedene Werte von V_m/U_∞ angegeben. Für die nicht drehende Kugel, $V_m/U_\infty = 0$, und bis zu Werten von V_m/U_∞ von etwa 3 hat die Kurve c_w über *Re* den charakteristischen Verlauf mit dem bekannten plötzlichen Abfall bei der sog. kritischen *Reynolds*schen Zahl. Es ist bekannt, daß für *Re*-Zahlen unterhalb der kritischen *Re*-Zahl die Reibungsschicht laminar ablöst, dagegen oberhalb der kritischen *Re*-Zahl turbulent ablöst. Im Fall ohne Drehung liegt

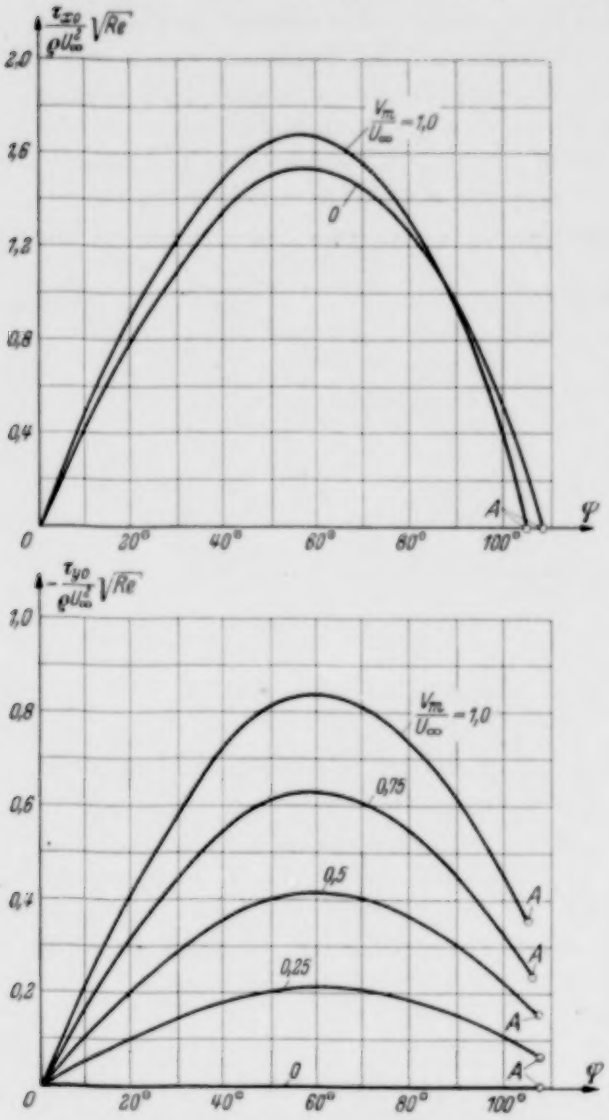

Abb. 10. Die Wandschubspannungskomponenten in meridionaler und azimutaler Richtung τ_{x0} bzw. τ_{y0} für die angeblasene rotierende Kugel. $Re = U_\infty R_m/\nu$.

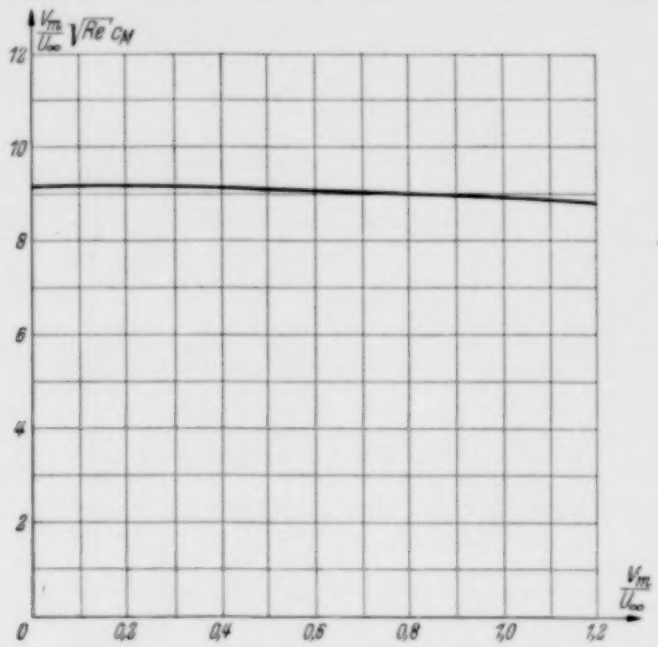

Abb. 11. Der Drehmomentenbeiwert c_M für die angeblasene rotierende Kugel. $Re = U_\infty R_m/\nu$.

der laminare Ablösungspunkt bei etwa $\varphi = 81°$ dagegen der turbulente bei etwa $\varphi = 110°$ bis 120°. Die Messungen mit Drehung zeigen nun für $V_m/U_\infty = 0$ bis 1,4 eine Verschiebung der kritischen *Re*-Zahl nach größeren Werten von *Re*. Diese Verschiebung der kritischen *Reynolds*schen Zahl nach größeren Werten bei kleinen V_m/U_∞ dürfte dadurch zustande kommen, daß der laminare Ablösungspunkt von $\varphi = 81°$ bei $V_m/U_\infty = 0$ nach größeren φ-Werten verschoben wird, wobei die Ablösung aber noch laminar bleibt. Erst bei größeren Werten von V_m/U_∞ bewirkt die Drehung ein vorzeitiges Turbulentwerden der Reibungsschicht, und sie wirkt dann wie ein Stolperdraht, wodurch eine Verschiebung der kritischen *Re*-Zahl nach kleineren *Re*-Zahlen zustande kommt.

Während bei unseren theoretischen Rechnungen durch den Einfluß der Drehung eine Verschiebung des Ablösungspunktes nach vorn vorhanden ist, deuten diese Messungen für kleine Werte von V_m/U_∞ auf eine Verschiebung des Ablösungspunktes nach hinten. Dies muß auf Grund der Wirkung der Zentrifugalkräfte aber auch erwartet werden, wenn man bedenkt,

[1] Fußnote 2 von S. 227.

daß im Fall ohne Drehung nach der Theorie der laminare Ablösungspunkt hinter dem Äquator, dagegen nach der Messung vor dem Äquator liegt. In beiden Fällen wird der Ablösungspunkt durch die Wirkung der Zentrifugalkräfte nach dem Äquator hin verschoben, was zum mindesten für kleine V_m/U_∞ auch erwartet werden muß, solange durch die Rotation noch kein vorzeitiger Umschlag laminar/turbulent herbeigeführt wird.

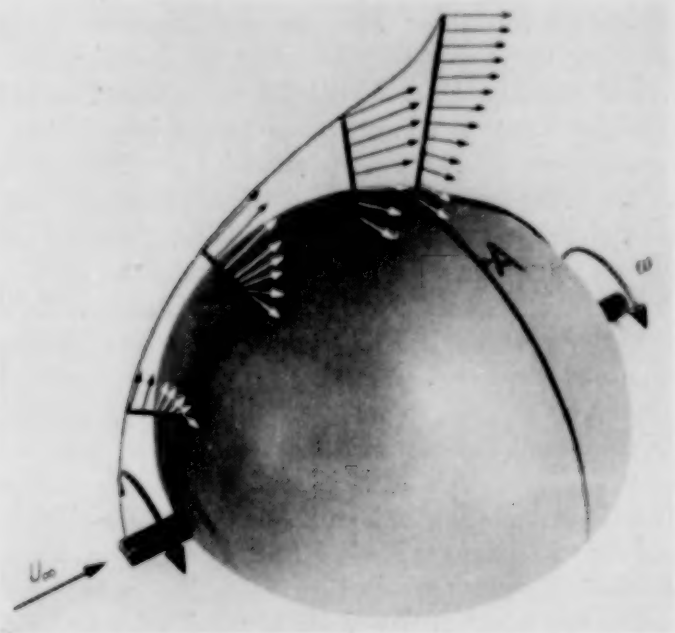

Abb. 12. Bildliche Darstellung der Geschwindigkeitsverteilungen in der Grenzschicht der angeblasenen rotierenden Kugel, $V_m/U_\infty = 1$, A = Ablösungslinie.

b) Halbkörper. Als zweites Beispiel sei jetzt der sogenannte Halbkörper (Drehkörper *I*) behandelt, der durch Überlagerung einer räumlichen Quellströmung mit einer Translationsströmung entsteht. Bezeichnen wir mit R_m den größten Halbmesser im Unendlichen, dann gilt die folgende Parameterdarstellung für die geometrischen Daten des Körpers[1]

$$\frac{R}{R_m} = \sin\frac{\varphi}{2}, \tag{66}$$

$$\frac{x}{R_m} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\frac{\varphi}{2}} + F\left(\frac{\varphi}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right) - E\left(\frac{\varphi}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right). \tag{67}[2]$$

Abb. 13. Widerstandsbeiwerte der angeblasenen rotierenden Kugel in Abhängigkeit von der *Reynolds*schen Zahl, nach Messungen von *S. Luthander* und *A. Rydberg*.

[1] Diese Beziehungen, sowie die numerischen Rechnungen von Ziff. 5a, verdanke ich Herrn Dr. *E. Truckenbrodt*. Die Beispielrechnungen von Ziff. 5b und c sind der Diplom-Arbeit von *K.-H. Gronau* (1952) entnommen.

[2] Es bedeutet

$$F\left(\frac{\varphi}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right) = \int_0^{\varphi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\vartheta}} \quad \text{und} \quad E\left(\frac{\varphi}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right) = \int_0^{\varphi/2} \sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\vartheta}\, d\vartheta .$$

Dabei ist φ der vom vorderen Staupunkt aus gemessene Winkel. Es sind F und E die unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für den Modul $\varkappa = 60°$.

Die Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich zu

$$\frac{U}{U_\infty} = 2 \sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,. \tag{68}$$

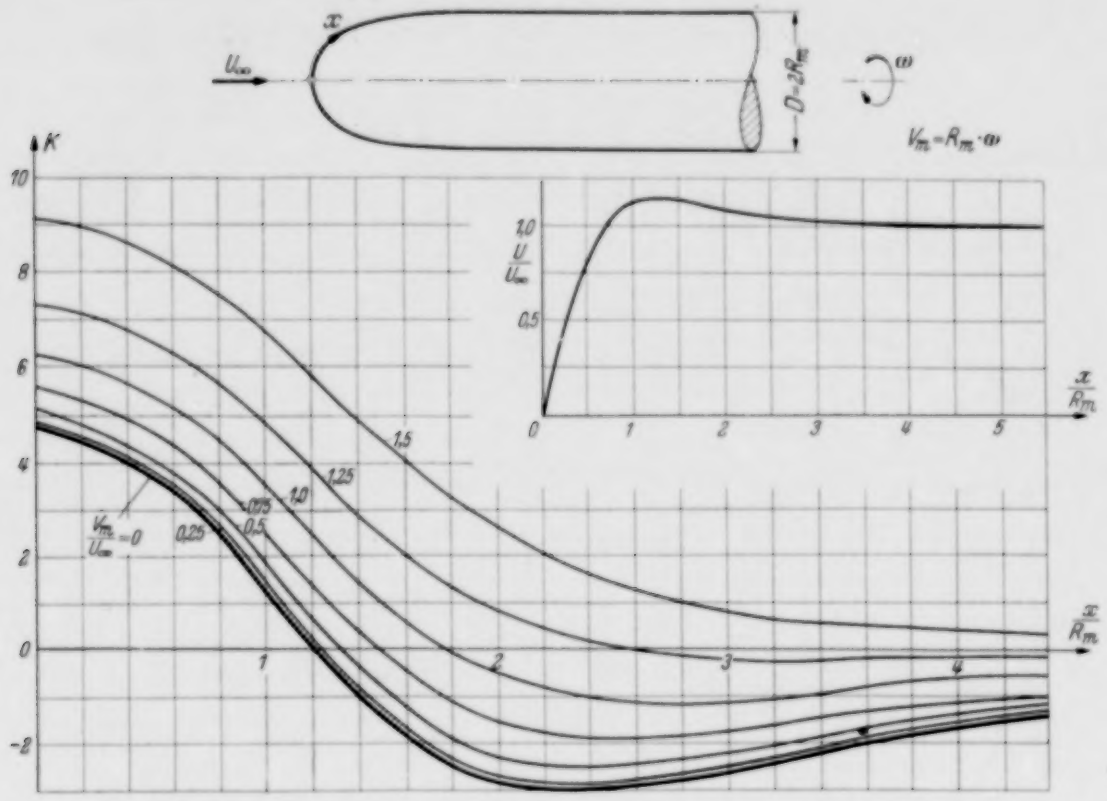

Abb. 14. Der Formparameter K für den angeblasenen rotierenden Halbkörper. (Drehkörper *I*).

In Abb. 14 sind die Körperform und die Geschwindigkeitsverteilung dargestellt. Diese Abbildung zeigt für verschiedene Werte des Drehparameters V_m/U_∞ den Verlauf des Formparameters K über der Lauflänge des Körpers. Man sieht, daß bereits bei $V_m/U_\infty \approx 1{,}3$ sich nur positive

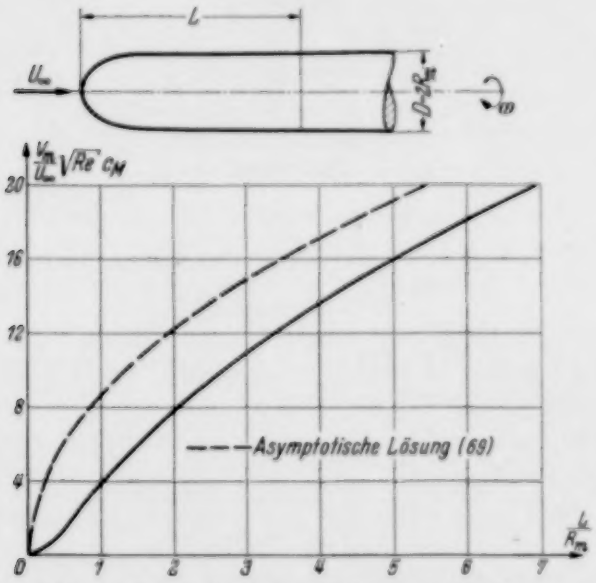

Abb. 15. Der Drehmomentenbeiwert c_M für den angeblasenen rotierenden Halbkörper in Abhängigkeit von der Körperlänge.
$Re = U_\infty R_m/\nu$.

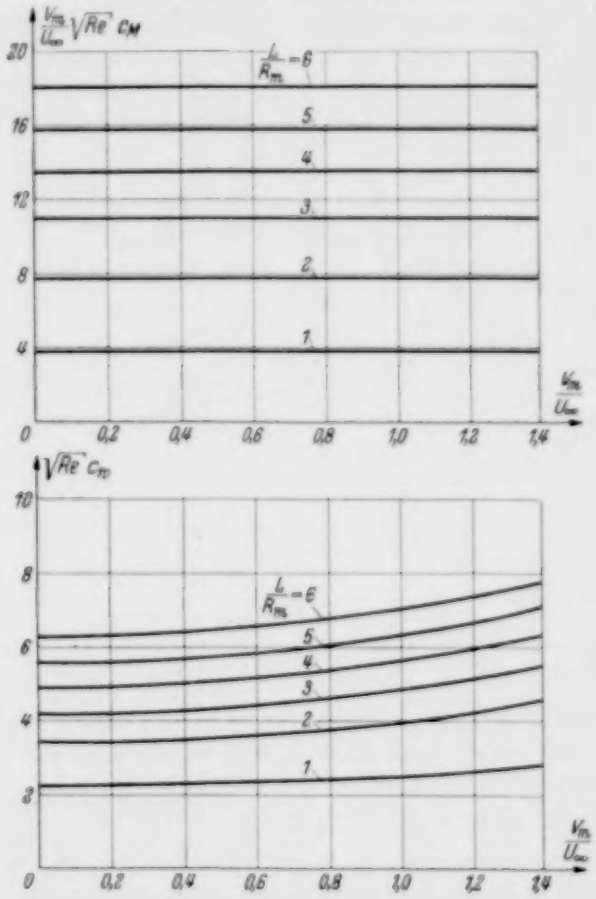

Abb. 16. Der Drehmomentenbeiwert c_M und der Widerstandsbeiwert c_w für den angeblasenen rotierenden Halbkörper (Drehkörper I) in Abhängigkeit vom Drehparameter V_m/U_∞. Es ist $Re = U_\infty R_m/\nu$.

Werte von K ergeben. Das bedeutet, daß durch die Drehung die laminare Reibungsschicht stabiler geworden ist, weil im vorliegenden Fall die Zentrifugalkräfte in der Strömungsrichtung beschleunigen und damit wie ein zusätzlicher Druckabfall wirken. Wir wollen darauf verzichten, hier sämtliche Ergebnisse zu diskutieren. In Abb. 15 haben wir den Drehmomentenbeiwert $\frac{V_m}{U_\infty}\sqrt{\frac{U_\infty R_m}{\nu}}\,c_M$ über der Länge L/R_m des Halbkörpers dargestellt. Zum Vergleich ist auch noch die asymptotische Lösung eingezeichnet, für die man die Beziehung

$$\frac{V_m}{U_\infty}\sqrt{\frac{U_\infty R_m}{\nu}}\,c_M = 8{,}6\sqrt{\frac{L}{R_m}} \tag{69}$$

herleiten kann.

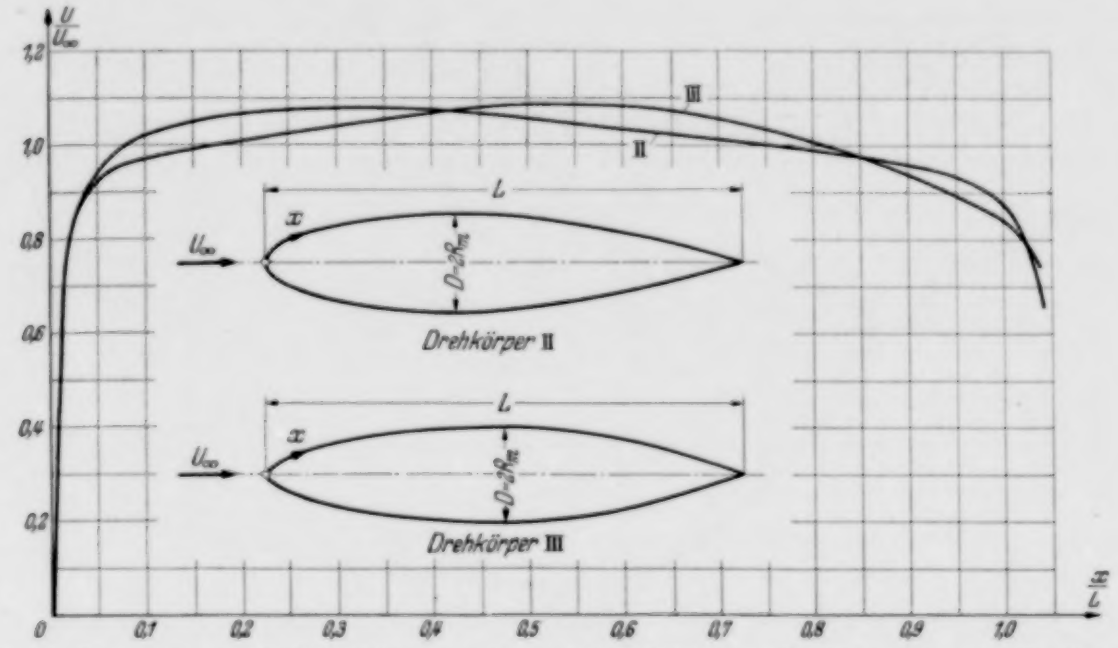

Abb. 17. Die Körperform und die Potentialströmung für zwei Stromlinienkörper (Drehkörper *II* und *III*); $D/L = 0{,}2$.

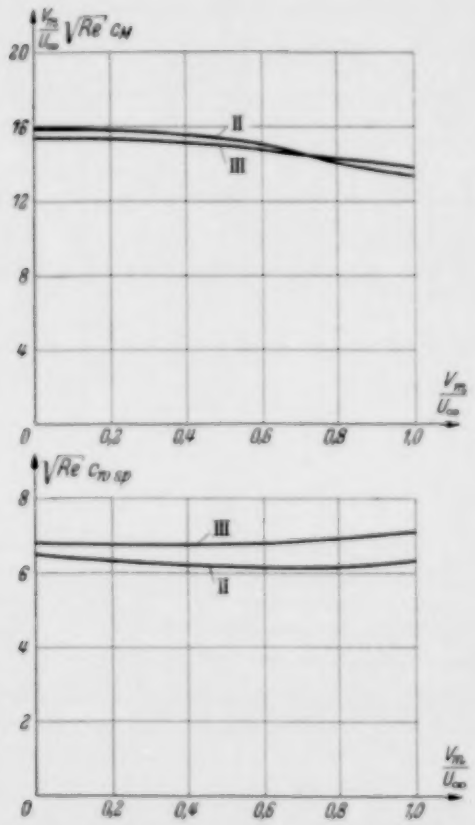

Abb. 18. Der Drehmomentenbeiwert c_M und der Widerstandsbeiwert c_W für die beiden Stromlinienkörper nach Abb. 17 in Abhängigkeit vom Drehparameter V_m/U_∞. Es ist $Re = U_\infty R_m/\nu$.

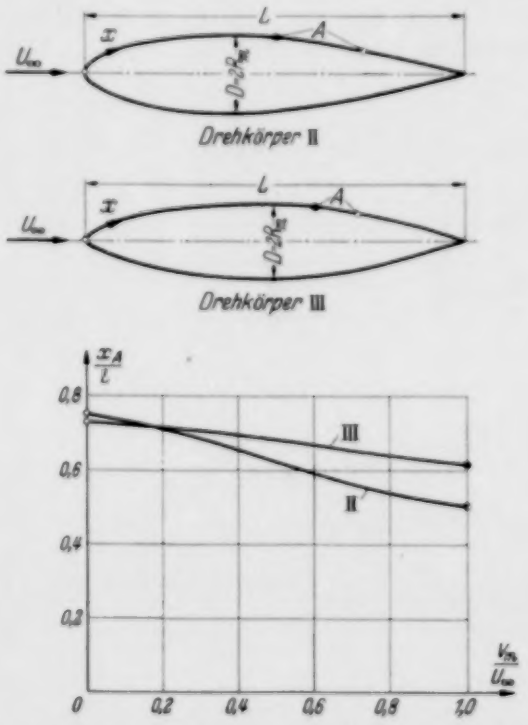

Abb. 19. Die Lage des Ablösungspunktes A für die beiden Stromlinienkörper nach Abb. 17 in Abhängigkeit vom Drehparameter V_m/U_∞. Lage des Ablösungspunktes ○ für $V_m/U_\infty = 0$; ● für $V_m/U_\infty = 1$.

Außer dem Drehmoment wurde auch der Reibungswiderstand bestimmt. Abb. 16 gibt eine Zusammenstellung des Drehmomentenbeiwertes und des Widerstandsbeiwertes in Abhängigkeit vom Drehparameter V_m/U_∞ bei verschiedenen Körperlängen L/R_m. Hervorzuheben ist der etwa quadratisch mit dem Drehparameter anwachsende Widerstandsbeiwert, was mit den bisher bekannt gewordenen Versuchsergebnissen qualitativ übereinstimmt.

c) Stromlinienkörper. Als weitere Beispiele wurden noch zwei profilierte Stromlinienkörper vom Dickenverhältnis $D/L = 0{,}2$ gerechnet (Drehkörper *II* und *III*). Die Körperformen

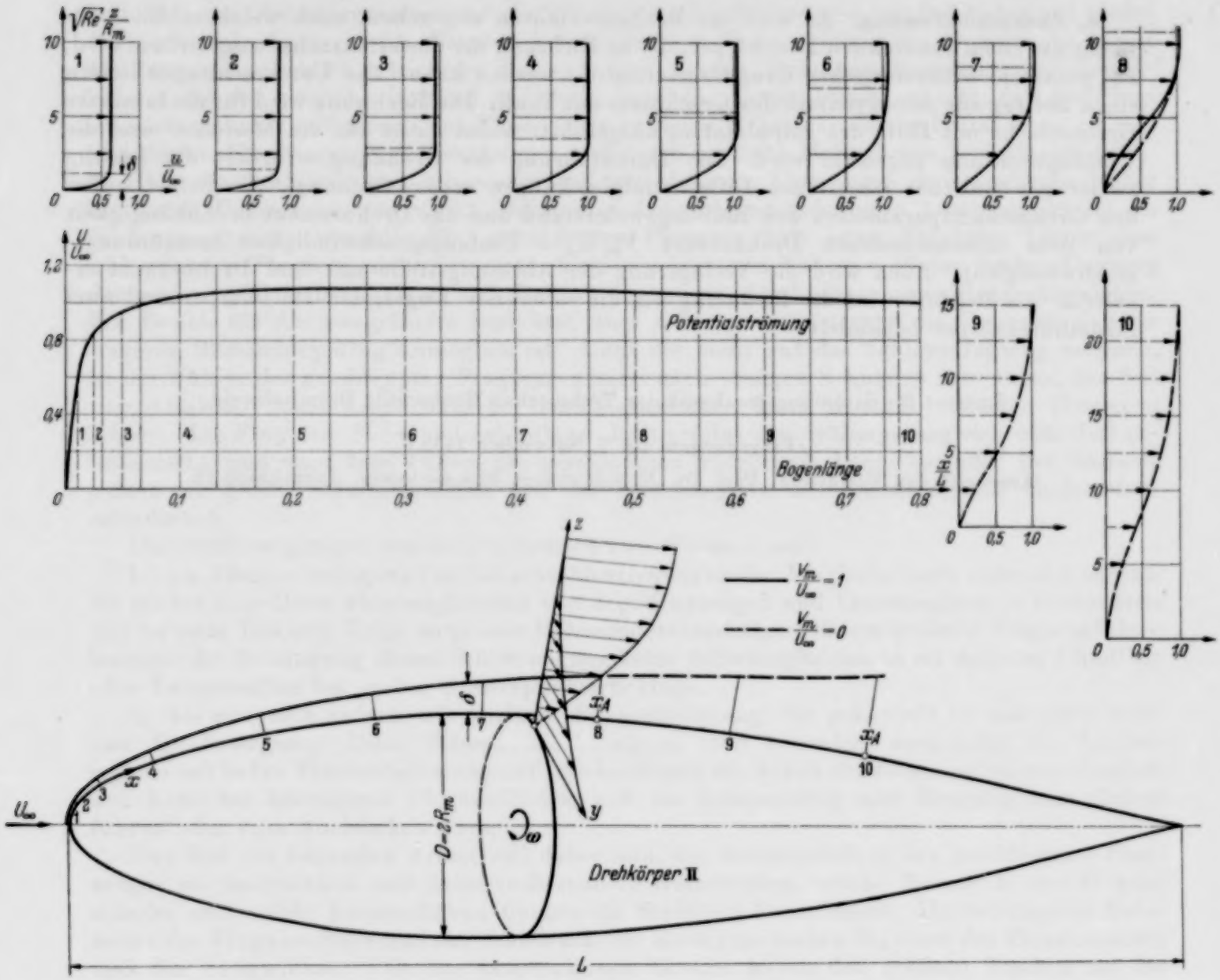

Abb. 20. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht am Drehkörper *II* für die Drehparameter $V_m/U_\infty = 0$ und $V_m/U_\infty = 1{,}0$. $Re = U_\infty R_m/\nu$. Im unteren Bild ist die Grenzschichtdicke δ $\frac{1}{30}\sqrt{Re}$-fach überhöht.

und die dazu gehörigen Geschwindigkeitsverteilungen wurden aus der Arbeit von *A. D. Young* und *E. Young*[1] entnommen (Abb. 17). Der Drehkörper *II* hat als Meridianschnitt ein normales Profil, dagegen der Drehkörper *III* ein Laminarprofil mit relativ weit stromabwärts liegendem Geschwindigkeitsmaximum. Von den Ergebnissen sind in Abb. 18 der Drehmomentenbeiwert und der Beiwert des Reibungswiderstandes in Abhängigkeit vom Drehparameter V_m/U_∞ angegeben. In beiden Fällen zeigen die Körper unter sich keine großen Unterschiede. Im Übrigen ist der Verlauf ähnlich wie beim Halbkörper. In Abb. 19 ist die Lage der Ablösungspunkte in Abhängigkeit vom Drehparameter V_m/U_∞ angegeben. In Übereinstimmung mit den Werten der rotierenden Kugel (vgl. Tabelle 4) rückt der Ablösungspunkt mit größer werdender

[1] *A. D. Young, E. Young*, A family of streamline bodies of revolution suitable for high-speed and low-drag requirements, ARC Report 2204 (1951).

Drehgeschwindigkeit nach vorn. Diese Wanderung ist beim Drehkörper *II* stärker als beim Drehkörper *III*, was aus der Lage des Geschwindigkeitsmaximums verständlich ist. Schließlich haben wir für den Drehkörper *II* noch eine bildliche Darstellung der Geschwindigkeitsverteilungen in der Reibungsschicht bei den Drehparametern $V_m/U_\infty = 0$ und $V_m/U_\infty = 1$ gegeben (Abb. 20). Hieraus ersieht man, daß die meridionale Geschwindigkeitskomponente sich vor dem Druckminimum durch den Einfluß der Drehung nicht merklich ändert, während auf der Strecke vom Druckminimum bis zur Ablösungsstelle der Einfluß der Drehung beträchtlich ist.

6. Zusammenfassung. Es wird ein Rechenverfahren angegeben, nach welchem die Strömung um einen rotierenden Drehkörper, der in Richtung der Rotationsachse angeströmt wird, auf grenzschichttheoretischer Grundlage ermittelt werden kann. Die Untersuchungen liefern einen Beitrag zur Aerodynamik des Geschosses mit Drall. Die Rechnung wird für die laminare Grenzschicht mit Hilfe des Impulssatzes ausgeführt, wobei dieser für die Meridian- und die Umfangsrichtung angesetzt wird. Die Durchführung der Rechnung erfordert die Lösung zweier gewöhnlicher simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung. Sie liefert außer den Grenzschichtparametern den Reibungswiderstand und das Drehmoment in Abhängigkeit von dem dimensionslosen Drehbeiwert V_m/U_∞ = Umfangsgeschwindigkeit/Anströmungsgeschwindigkeit. Auch wird die Verlagerung der Ablösungsstelle mit dem Drehbeiwert erhalten. Als Beispiel wird die Strömung um die rotierende Kugel, den Halbkörper und zwei Stromlinienkörper behandelt.

Institut für Strömungsmechanik der Technischen Hochschule Braunschweig.

(Eingegangen am 7. November 1952.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *H. Schlichting*, Braunschweig, Jahnskamp 18.

Die Seitenstabilität eines geschleppten Flugzeuges *.

Von W. Söhne.

1. Aufgabenstellung. Die Flugeigenschaften, insbesondere die statische und dynamische Stabilität von Motorflugzeugen und alleinfliegenden Segelflugzeugen wurden bisher mit großer Aufmerksamkeit untersucht. Hierdurch wurde für den Flugzeugführer die mechanische Arbeit des Steuerns erheblich erleichtert und ihm eine gewisse Sicherheit gegenüber Bedienungsfehlern und die Möglichkeit, blind zu fliegen, gegeben. Ferner wurde erreicht, daß der Flugzeugkonstrukteur auf Grund der Theorie mit gewisser Sicherheit die Stabilität eines zu entwickelnden Flugzeuges vorherbestimmen und durch bauliche Maßnahmen beeinflussen kann.

Über die Stabilität von mit einem Seil geschleppten Flugzeugen dagegen liegen bisher fast keine Untersuchungen vor[1]. Mit den in Deutschland bekannten Lastenseglern ist ein Schleppzug meist instabil. Ein geschlepptes Flugzeug hält seine Flugbahn hinter dem schleppenden Flugzeug nicht automatisch ein, sondern sein Führer muß das Schleppflugzeug dauernd sorgfältig beobachten und Bahnabweichungen durch Steuerausschläge ausgleichen. Ein Beweis für die mangelhafte Stabilität eines Schleppzuges ist auch die Tatsache, daß ein längerer Blindschleppflug unmöglich ist. Geht die Sicht auf das Schleppflugzeug verloren, ist der Führer des geschleppten Flugzeuges meist nach wenigen Sekunden gezwungen, das Seil auszuklinken. Sogar kurze zeitliche Unaufmerksamkeit kann zu stark gestörten Fluglagen führen. Im Flug mit Sicht und bei ruhiger Luft erfolgt der Störungsausgleich zum Teil gefühlsmäßig und wird dem Führer des geschleppten Flugzeuges kaum bewußt. Bei Böigkeit jedoch ist große Aufmerksamkeit und bei Lastenseglern auch anstrengende Ruderarbeit erforderlich.

Die Störbewegungen treten in folgenden zwei Formen auf:

1. Als Längsschwingung (periodische Abweichungen der Flugbahn nach oben und unten). Sie ist bei ungeübten Flugzeugführern von Segelflugzeugen und Lastenseglern zu beobachten und ist zum Teil eine Folge zu grober Höhenruderausschläge. Einem geübten Flugzeugführer bereitet die Beseitigung dieser Störbewegung keine Schwierigkeiten, es sei denn im Blindflug oder Langsamflug bei großer Schwerpunktsrücklage.

2. Als eine sich anfachende seitliche Bahnschwingung, die gekoppelt ist mit einer Roll- und Gierbewegung. Diese Seitenbahnschwingung tritt besonders ausgeprägt bei Lastenseglern mit hoher Flächenbelastung auf. Sie erschwert die Arbeit des Flugzeugführers erheblich und kann bei besonderen Flugzuständen, z. B. im Langsamflug und Steigflug zum Seilriß führen oder zum Ausklinken zwingen.

Das Ziel der folgenden Arbeit soll daher sein, die Seitenstabilität des geschleppten Flugzeuges zu untersuchen und dabei insbesondere festzustellen, welche Parameter des Flugzustandes und welche konstruktiven Größen die Stabilität beeinflussen. Die wichtigsten Parameter des Flugzustandes sind der Staudruck, die aerodynamischen Beiwerte des Flugzustandes und der Steigwinkel. Von den konstruktiven Größen haben den größten Einfluß auf die Stabilität die Länge des Schleppseiles, die Lage des Fesselungspunktes gegenüber dem Schwerpunkt, das Verhältnis der Flächenbelastungen des Schleppflugzeuges und des geschleppten Flugzeuges, die Trägheitsmomente des geschleppten Flugzeuges, die V-Form der Tragfläche des geschleppten Flugzeuges als maßgebliche Einflußgröße für das Schieberollmoment, endlich

---

* Auszug aus der Dissertation des Verfassers (Braunschweig 1947). Hauptberichter: Prof. Dr. *H. Schlichting*; Mitberichter: Prof. Dr. *H. Blenk*.

Der Verfasser konnte als Flugzeugführer von Lastenseglern im zweiten Weltkrieg eingehende Flugerfahrungen sammeln, die ihm die Anregung zu den hier mitgeteilten theoretischen Untersuchungen gaben. Diese wurden nach Kriegsende mit Genehmigung des britischen Ministry of Supply in Zusammenarbeit mit dem Institut für Strömungsmechanik der Technischen Hochschule Braunschweig ausgeführt.

[1] In der einzigen dem Verfasser zugänglich gewesenen Arbeit von *H. Solf* (Die Seitenstabilität eines geschleppten Flugzeuges, FB-Bericht 1306, 1940) wurde die Seitenstabilität eines Flugzeuges betrachtet, dessen Fesselungspunkt in einer vertikalen Geraden durch den Schwerpunkt angenommen und dessen Gierschwingung vernachlässigt wird. Die Ergebnisse erscheinen daher für die Praxis nicht im genügenden Maße anwendbar.

die Größe und Form des Seitenleitwerkes des geschleppten Flugzeuges, sein Schwerpunktsabstand sowie Rumpfform und Größe der seitlichen Rumpfprojektionsflächen vor und hinter dem Schwerpunkt als maßgebliche Einflußgrößen für das Schiebegiermoment und die Schiebeseitenkraft.

Ähnlich wie man bei einem alleinfliegenden Flugzeug die Forderung nach Längs- und Seitenstabilität nicht soweit treiben kann, daß das Flugzeug eine bestimmte Flughöhe und einen bestimmten Kurs automatisch einhält, so kann man auch beim geschleppten Flugzeug kaum verlangen, daß es allein seine Bahn hinter dem Schleppflugzeug einhält, zumal unter den wechselnden Bedingungen des Startes, Steigflugs und Reiseflugs. Anzustreben ist vielmehr eine möglichst große Entlastung des Führers des geschleppten Flugzeuges von der Arbeit des Steuerns und für den Blindflug die Möglichkeit, sich nach der Richtung des Schleppseiles zu orientieren, wenn es nicht gelingt, ein Instrument zu entwickeln, das aus Seilrichtung und Seilzug die Lage des geschleppten Flugzeuges zum Schleppflugzeug erkennen läßt.

2. Der Einfluß des Schleppfluges auf Schleppflugzeug und Lastensegler auf Grund der Flugerfahrungen. Die Wirkung des Schleppverbandes auf das Schleppflugzeug und das geschleppte Flugzeug ist eine völlig verschiedene. Das Schleppflugzeug ist im Schleppflug stabiler als im Alleinflug. Es kann langsamer fliegen, seine Ruderwirksamkeit hält länger an, und Störungen klingen schneller ab. Man vergleiche hiermit etwa einen Drachen. Der Drachen wird durch den Widerstand und die Masse seines langen Schwanzes stabilisiert. Ähnlich ist die Wirkung eines gesteuerten geschleppten Flugzeuges auf das Schleppflugzeug.

Im Gegensatz zum Schleppflugzeug wird das geschleppte Flugzeug im Schlepp instabil. Dabei zeigen Rechnung und Flugerfahrungen übereinstimmend, daß diese Instabilität mit zunehmendem Auftriebsbeiwert, zunehmender Flächenbelastung und zunehmendem Steigwinkel größer wird. Das Verhältnis der Flächenbelastungen, also das Verhältnis der beiderseitigen Auftriebsbeiwerte spielt hierbei eine große Rolle. Aus Leistungsgründen wäre es erstrebenswert, wenn beide Flugzeuge mit Auftriebszahlen flögen, die ihrer besten Gleitzahl entsprächen. Um gleiches Verhalten bei Böigkeit[1] zu erreichen, wäre es dagegen wünschenswert, wenn die Auftriebszahlen etwa gleich wären. Die Erfahrungen des praktischen Flugbetriebes ergaben aber als günstigstes Verhältnis der Flächenbelastungen des Schleppflugzeuges und des geschleppten Flugzeuges mit Rücksicht auf die Flugeigenschaften im Schlepp etwa den Wert 1,6. Bei diesem Verhältnis der Flächenbelastungen muß der Führer des Schleppflugzeuges, um selbst schwebefähig zu bleiben, immer so schnell fliegen, daß der Auftriebsbeiwert des geschleppten Flugzeuges den Wert 0,8 nicht überschreitet, und der Führer des geschleppten Flugzeuges kommt nicht in einen Flugzustand mit höheren c_a-Werten, in dem die Ruderwirksamkeit nicht mehr ausreicht, die seitliche Bahnschwingung und die damit verbundene Roll- und Gierbewegung auszugleichen. Der Wunsch nach einer niedrigen Landegeschwindigkeit und einer Landemöglichkeit außerhalb von Flugplätzen führt ebenfalls zu einer niedrigeren Flächenbelastung des geschleppten Flugzeuges.

Der Führer des Schleppflugzeuges hat nur geringen Einfluß auf die Korrektur der Flugbahn des geschleppten Flugzeuges. Er muß nur einige feste Regeln beachten, z. B. die zulässige Geringstgeschwindigkeit, den zulässigen kleinsten Kurvenhalbmesser und den zulässigen Gleitwinkel bei geringer Geschwindigkeit einzuhalten. Bei höheren c_a-Werten hat das geschleppte Flugzeug einen besseren Gleitwinkel als das Schleppflugzeug und kann gegebenenfalls über das Schleppflugzeug bei gedrosselten Motoren hinausschießen.

3. Aufstellung der Bewegungsgleichung. a) Bezeichnungen. In dieser Arbeit werden neben den in DIN L 100 festgelegten Koordinatensystemen, nämlich dem flugzeugfesten System (x_f, y_f, z_f), dem flugwindfesten System (x_a, y_a, z_a) und dem erdfesten System (x_g, y_g, z_g) in erster Linie das experimentelle System (x, y, z) benutzt. Dieses System kann als Verbindung zwischen flugzeugfestem und flugwindfestem System aufgefaßt werden (Abb. 1).

Ferner bedeutet G das Gewicht des Flugzeuges, F die Flügelfläche, $b = 2s$ die Spannweite, i_x, i_y, i_z die Trägheitshalbmesser, h den Höhenabstand Fesselungspunkt-Schwerpunkt (Abb. 5), a den Längsabstand Fesselungspunkt-Schwerpunkt, l die Schleppseillänge und $k_s = l/s$ die relative Seillänge.

[1] Ist die Flächenbelastung eines Schleppflugzeuges dreimal so hoch wie die eines leeren geschleppten Flugzeuges und die beiden c_a-Werte im Reiseflug 0,75 und 0,25, so ruft eine Vertikalböe von 6,6 m/s bei 190 km/Std. eine Änderung des Auftriebsbeiwertes Δc_a von 0,54 bzw. 0,6 hervor, so daß sich für das Schleppflugzeug ein Lastvielfaches in der Böe von 1,72, für das geschleppte Flugzeug dagegen von 3,2 ergibt.

Als aerodynamische Größen bedeuten V die ungestörte Fluggeschwindigkeit, v_y die Komponente der gestörten Geschwindigkeit in y-Richtung, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ die Winkelgeschwindigkeitsstörungen im experimentellen System, α den Anstellwinkel, β den Schiebewinkel, γ den Flugwindlängsneigungswinkel ($\gamma > 0$ Steigflug).

Allgemein gilt: Bewegungen sind mit den Achsen positiv. Momente und Kräfte sind bis auf c_w und c_a mit den Achsen positiv. Letztere sind gegen die Achsen positiv.

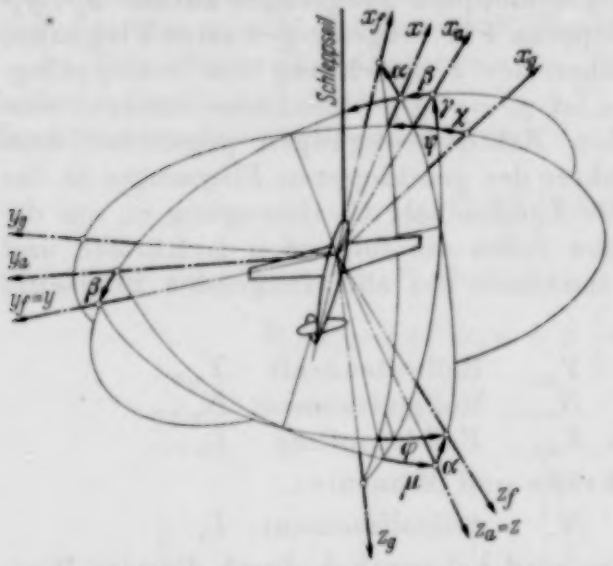

Abb. 1. Koordinatensysteme des geschleppten Flugzeuges.

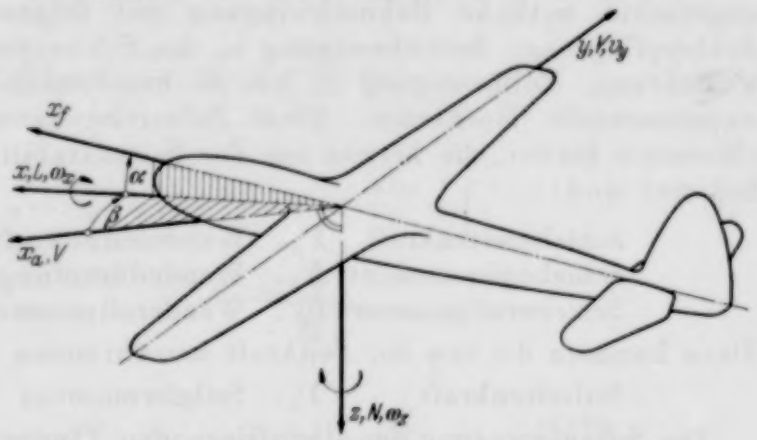

Abb. 2. Kräfte, Momente und Bewegungen der Seitenstabilität.

Sodann stellen wir in der folgenden Tabelle die von *H. Scholz* und *F. Wenk*[1] bekannten Formbeiwerte und Momentenzahlen zusammen.

	Aerodynamische Formbeiwerte der Seitenstabilität	Momentenzahlen
Auftrieb	c_a	
Schiebeseitenkraft	$c_{q\beta} = \frac{\partial c_q}{\partial \beta}$	
Wendeseitenkraft	$c_{qz} = \frac{\partial c_q}{\partial s\omega_z a/V}$	
Rollseitenkraft	$c_{qx} = \frac{\partial c_q}{\partial s\omega_x a/V}$	
Schiebegiermoment	$c_{n\beta} = -\frac{\partial c_N}{\partial \beta}$	$n_\beta = \left(\frac{s}{i_z}\right)^2 c_{n\beta}$
Wendedämpfung	$c_{nz} = -\frac{\partial c_N}{\partial s\omega_z a/V}$	$n_z = \left(\frac{s}{i_z}\right)^2 c_{nz}$
Rollgiermoment	$c_{nx} = -\frac{\partial c_N}{\partial s\omega_x a/V}$	$n_x = \left(\frac{s}{i_z}\right)^2 c_{nx}$
Schieberollmoment	$c_{l\beta} = -\frac{\partial c_L}{\partial \beta}$	$l_\beta = \left(\frac{s}{i_x}\right)^2 c_{l\beta}$
Wenderollmoment	$c_{lz} = -\frac{\partial c_L}{\partial s\omega_z a/V}$	$l_z = \left(\frac{s}{i_x}\right)^2 c_{lz}$
Rolldämpfung	$c_{lx} = -\frac{\partial c_L}{\partial s\omega_x a/V}$	$l_x = \left(\frac{s}{i_x}\right)^2 c_{lx}$
	Aerodynamische Formbeiwerte der Seilkraft und Seilmomente	**Seilmomentenzahlen**
Seilkraft	$c_s = c_w + c_a \operatorname{tg} \Delta$	
Seilrollmoment	$c_{ls} = c_s \frac{h \cos \Delta + a \sin \Delta}{s}$	$l_s = \left(\frac{s}{i_x}\right)^2 c_{ls}$
Seilgiermoment	$c_{ns} = c_s \frac{-h \sin \Delta + a \cos \Delta}{s}$	$n_s = \left(\frac{s}{i_z}\right)^2 c_{ns}$

[1] *H. Scholz* und *F. Wenk*, Jahrb. 1941 der deutschen Luftfahrtforschung, S. I 159.

b) Allgemeiner Verlauf einer Seitenbewegung. Ein Schleppzug fliege stationär geradeaus. Infolge einer Störung gerate das geschleppte Flugzeug in eine Lage gegenüber dem Schleppflugzeug, die durch folgende Winkel gekennzeichnet werde (Abb. 1 und 4): σ Winkel zwischen der ungestörten Flugrichtung des Schleppflugzeuges und dem Schleppseil, χ Winkel zwischen der Projektion der x_a-Achse des geschleppten Flugzeuges auf die x_g-, y_g-Ebene gegen die x_g-Achse, β Schiebewinkel des geschleppten Flugzeuges gegen seine Flugbahn, μ Flugwind-Querneigungswinkel. Der Winkel zwischen der Flugrichtung des Schleppflugzeuges und der x-Achse des geschleppten Flugzeuges ist $\psi_e = \chi \operatorname{tg} \gamma + \beta$. Dabei entsteht eine angefachte seitliche Bahnschwingung mit folgenden Relativbewegungen gegenüber dem Schleppflugzeug: Seitenbewegung v_y des Schwerpunktes des geschleppten Flugzeuges in der y-Richtung, Rollbewegung ω_x um die experimentelle Längsachse, Gierbewegung ω_z um die experimentelle Hochachse. Diese Relativbewegungen rufen die folgenden Luftkräfte und -Momente hervor, die bereits aus der Seitenstabilitätstheorie des alleinfliegenden Flugzeugs bekannt sind:

Schiebeseitenkraft	Y_β,	Wendeseitenkraft	$Y_{\omega z}$,	Rollseitenkraft	$Y_{\omega x}$,
Schiebegiermoment	N_β,	Wendedämpfung	$N_{\omega z}$,	Rollgiermoment	$N_{\omega x}$,
Schieberollmoment	L_β,	Wenderollmoment	$L_{\omega z}$,	Rolldämpfung	$L_{\omega x}$.

Dazu kommen die von der Seilkraft herrührenden Kräfte und Momente:

Seilseitenkraft	Y_s,	Seilgiermoment	N_s,	Seilrollmoment	L_s.

Die Seitenbewegung des alleinfliegenden Flugzeugs wird bekanntlich durch die vier Wurzeln der Frequenzgleichung charakterisiert, nämlich durch die reelle Rolldämpfungswurzel λ_1, die die schnell abklingende aperiodische Rollbewegung bestimmt, ein konjugiert komplexes Wurzelpaar $\lambda_{23} = u_{23} \pm i w_{23}$, das die im allgemeinen gedämpfte Gierschwingung bestimmt (u_{23} Dämpfungsgröße, w_{23} Frequenzgröße) und die reelle Spiralwurzel λ_4, die die im allgemeinen sehr langsame aperiodische Spiralbewegung bestimmt, die negativ, d.h. stabil und positiv, d.h. instabil sein kann.

Die Seitenbewegung des geschleppten Flugzeuges wird dagegen durch sechs Wurzeln charakterisiert[1]. Ebenso wie beim alleinfliegenden Flugzeug durch die Rolldämpfungswurzel λ_1 und das Gierschwingungswurzelpaar $\lambda_{23} = u_{23} \pm i w_{23}$. Hierzu kommen ein weiteres konjugiert komplexes Wurzelpaar $\lambda_{45} = u_{45} \pm i w_{45}$, welches die seitliche Schwerpunktsbahnschwingung kennzeichnet und fast immer stark angefacht ist (Abb. 3) und eine reelle Wurzel λ_6, die die statische Seitenstabilität im Schleppflug bestimmt.

Die seitliche Bahnschwingung sowie die statische Stabilität im Schlepp wird im folgenden in erster Linie betrachtet.

c) Voraussetzungen für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Zur Vereinfachung der Rechnung werden folgende Voraussetzungen getroffen:

1. Da nur untersucht werden soll, ob die Störbewegungen stabil, indifferent oder instabil sind, genügt es, die Störungen als klein anzunehmen und also $\cos\mu \approx 1$, $\sin\mu \approx \mu$, $\cos\beta \approx 1$, $\sin\beta \approx \beta$ zu setzen.

2. Wie bei anderen Stabilitätsbetrachtungen darf man auch beim geschleppten Flugzeug auf Grund der Flugerfahrungen bei kleinen Störbewegungen die Längs- und Seitenstabilität getrennt untersuchen.

3. Es wird das Verhalten des Flugzeuges mit festen Rudern untersucht.

4. Es wird angenommen, daß das Schleppflugzeug ungestört von der Seitenbewegung des geschleppten Flugzeuges seine Flugbahn einhält. Für den Führer des Schleppflugzeuges sind schon geringe vom Seilzug hervorgerufene Drehungen um die Hochachse deutlich spürbar, denen er fast automatisch von Hand entgegensteuert, oder die durch die Kurssteuerung korrigiert werden. Da ferner Masse und Trägheitsmomente des Schleppflugzeuges erheblich größer sind als die des geschleppten Flugzeuges, trifft diese Voraussetzung auch mit guter Näherung zu.

5. Schließlich wird noch angenommen, daß die Momentenbeiwerte linear mit den Drehgeschwindigkeiten ω_x und ω_z und der Seitenbewegung v_y ansteigen, eine Annahme, die in der Seitenstabilitätstheorie allgemein üblich ist und sich als zulässig erwiesen hat.

d) Aufstellung der Differentialgleichungen der Seitenbewegung. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen für das geschleppte Flugzeug sagen aus, daß die vektorielle

[1] Dieses Ergebnis der folgenden Untersuchungen wird des besseren Verständnisses wegen vorweggenommen.

Summe von Luft- und Seilkräften gleich den Trägheitskräften und die Summe von Luft- und Seilmomenten gleich den Drehbeschleunigungsmomenten ist. Für die Untersuchung der Seitenbewegung genügt es, die Momentengleichgewichte um die x- und z-Achse und das Kräftegleichgewicht in der y-Achse zu betrachten. In der folgenden Aufstellung der Differentialgleichungen werden die Beschleunigungsglieder und die Glieder der Luftkräfte und -Momente in der von *H. Scholz* und *F. Wenk*[1] angegebenen Form benützt.

1. Die Seitenkraftgleichung. Die Massenbeschleunigung ist $(G/g)\,V\chi\cos\gamma$. Die Luftseitenkraft ist gleich $A\mu + Y_\beta + Y_{\omega x} + Y_{\omega z}$. Nach Einführung der aerodynamischen Formbeiwerte lautet dieser Ausdruck

$$R_{y\,a\,Luft} = qF\left[c_a\mu + \beta c_{q\beta} + \frac{s\,\omega_{xa}}{V} c_{qx} + \frac{s\,\omega_{za}}{V} c_{qz}\right]$$

oder wegen $\omega_{za} = \omega_z$, $\omega_{xa} = \omega_x - \omega_{y\beta}$

$$R_{y\,a\,Luft} = qF\left[c_a\mu + \beta\left(c_{q\beta} - \frac{s\,\omega_y}{V} c_{qx}\right) + \frac{s\,\omega_x}{V} c_{qx} + \frac{s\,\omega_z}{V} c_{qz}\right]. \qquad (1)$$

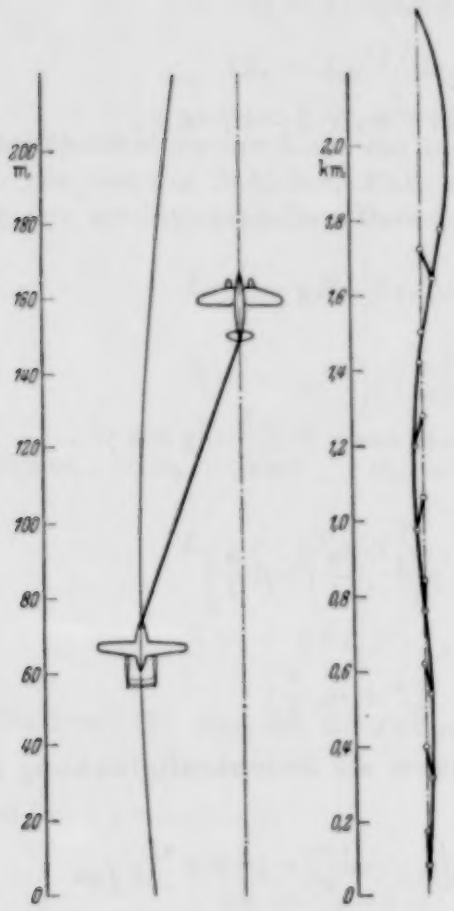

Abb. 3. Angefachte Seitenbahnschwingung eines geschleppten Flugzeuges bei Fluggeschwindigkeit 206 km/h und Seillänge 80 m. Schleppflugzeug He 111, Lastensegler Go 242. Schwingungsdauer ~ 32 sec.

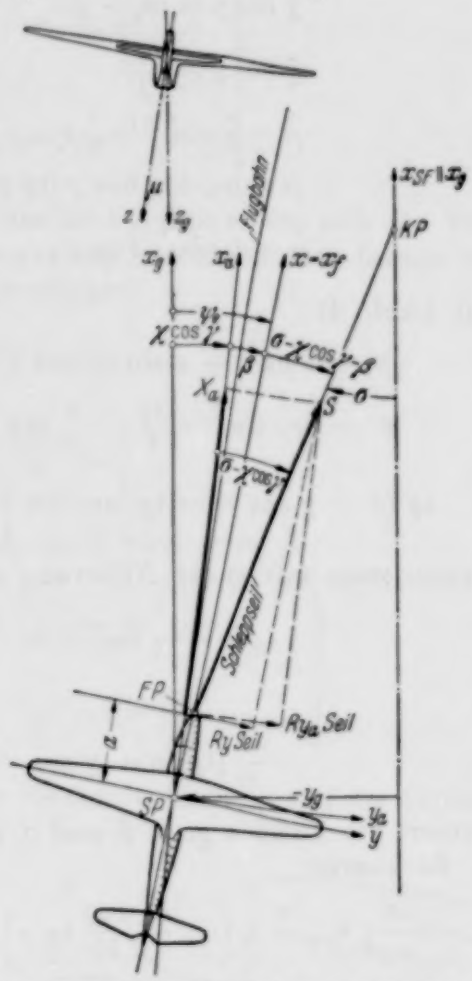

Abb. 4. Seilkräfte und Winkel am geschleppten Flugzeug. *KP* Kupplungspunkt am Schleppflugzeug, *SP* Schwerpunkt des geschleppten Flugzeugs, *FP* Fesselungspunkt am geschleppten Flugzeug.

Dazu kommt nun noch eine Seilseitenkraft. Durch seine Seitenbewegung legt das geschleppte Flugzeug größere Wege zurück als das Schleppflugzeug, das nach Voraussetzung stationär geradeaus fliege. Hierdurch entstehen Geschwindigkeitsdifferenzen und Massenbeschleunigungen, die sich in veränderlichen Seilkräften äußern. Um den Verlauf und die Größenordnung der Geschwindigkeitsdifferenzen und Beschleunigungen kennenzulernen, wurden sie für eine erflogene Schwingung untersucht. Das Ergebnis dieser Untersuchung gestattet es, die Geschwindigkeit des geschleppten Flugzeuges als konstant anzusehen. Dann ist unter Berücksichtigung eines Steig- oder Sinkwinkels γ die Seilkraft

$$S = \frac{W + A\,\mathrm{tg}\,\gamma}{\cos(\sigma - \chi\cos\gamma)}\cos\mu = \frac{qF(c_w + c_a\,\mathrm{tg}\,\gamma)}{\cos(\sigma - \chi\cos\gamma)}\cos\mu\,.$$

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 247.

Nach Einführung des Beiwertes der Seilkraft $c_s = c_w + c_a \operatorname{tg} \gamma$ und wegen $\cos \mu = 1$ ist

$$S = \frac{q F c_s}{\cos(\sigma - \chi \cos \gamma)} \tag{2}$$

und die Seilkraftkomponente nach der Seite

$$S_{y\,a} = S \sin(\sigma - \chi \cos \gamma) = q F c_s \operatorname{tg}(\sigma - \chi \cos \gamma)\,. \tag{3}$$

Damit lautet die Seitenkraftgleichung

$$\frac{G}{g} V \dot{\chi} \cos \gamma = q F \left[c_a \mu + \beta \left(c_{q\beta} - \frac{s\,\omega_y}{V} c_{qx} \right) + \frac{s\,\omega_x}{V} c_{qx} + \frac{s\,\omega_z}{V} c_{qz} + c_s \operatorname{tg}(\sigma - \chi \cos \gamma) \right]. \tag{4}$$

In dieser Gleichung treten die Variablen χ, μ, β, ω_x, ω_z und σ auf. Der Einfluß von ω_y ist sehr gering. Als Veränderliche der Differentialgleichung werden die Größen ω_x, ω_z und die Geschwindigkeit $v_{y\,g}$ in y_g-Richtung gewählt. Es sind also die Variablen χ, μ, β und σ zu eliminieren. Hierfür bestehen folgende Beziehungen:

$$\dot{\chi} \cos \gamma = \omega_z - \dot{\beta}, \qquad \ddot{y}_g = \dot{v}_{y\,g} = V \dot{\chi} \cos \gamma = V(\omega_z - \dot{\beta}),$$

$$\dot{\chi} \cos \gamma = \frac{\dot{v}_{y\,g}}{V} \quad , \qquad \dot{\beta} = \omega_z - \frac{\dot{v}_{y\,g}}{V}\,,$$

$$\dot{\mu} - \dot{\chi} \sin \gamma + \dot{\chi} \cos \gamma \sin \mu \sin \beta = \omega_x\,,$$

$$\dot{\mu} = \omega_x + \dot{\chi} \cos \gamma (\operatorname{tg} \gamma - \sin \mu \sin \beta) \approx \omega_x + \dot{\chi} \cos \gamma \operatorname{tg} \gamma\,,$$

$$\dot{\mu} = \omega_x + \frac{\dot{v}_{y\,g}}{V} \operatorname{tg} \gamma\,.$$

Ferner ist (Abb. 4)

$$-y_g = l \sin \sigma + a \sin(\chi \cos \gamma + \beta)\,,$$

$$\sigma = \operatorname{arc\,sin}\left[-\frac{y_g}{l} - \frac{a}{l} \sin(\chi \cos \gamma + \beta) \right],$$

$$\operatorname{tg}(\sigma - \chi \cos \gamma) = \operatorname{tg}\left\{ \operatorname{arc\,sin}\left[-\frac{y_g}{l} - \frac{a}{l} \sin(\chi \cos \gamma + \beta) \right] - \chi \cos \gamma \right\}. \tag{5}$$

Hierfür kann man mit guter Näherung setzen:

$$\operatorname{tg}(\sigma - \chi \cos \gamma) = -\left[\frac{y_g}{l} + \chi \cos \gamma \left(1 + \frac{a}{l} \right) + \beta \frac{a}{l} \right]$$

und also

$$\frac{d}{dt} [\operatorname{tg}(\sigma - \chi \cos \gamma)] = -\left(\frac{v_{y\,g}}{l} + \frac{\dot{v}_{y\,g}}{V} + \omega_z \frac{a}{l} \right). \tag{6}$$

Man eliminiert die Größen χ, μ, β und σ, indem man zuvor die Seitenkraftgleichung (4) differentiiert. So kommt

$$\left.\begin{aligned} \frac{G}{g q F} \ddot{v}_{y\,g} = c_a \left(\omega_x + \frac{\dot{v}_{y\,g}}{V} \operatorname{tg} \gamma \right) + \left(\omega_z - \frac{\dot{v}_{y\,g}}{V} \right) \left(c_{q\beta} - \frac{s\,\omega_y}{V} c_{qx} \right) + \beta \frac{s\,\dot{\omega}_y}{V} c_{qx} \\ + \frac{s\,\dot{\omega}_x}{V} c_{qx} + \frac{s\,\dot{\omega}_z}{V} c_{qz} - c_s \left(\frac{v_{y\,g}}{l} + \frac{\dot{v}_{y\,g}}{V} + \omega_z \frac{a}{l} \right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hierin ist das Glied mit $\dot{\omega}_y$ vernachlässigbar.

In der Gleichung (7) werden die Seitenstabilitätsgrößen flugmechanische Zeiteinheit $T_F = 2\,G/g\,\varrho V F$ und relative Flugzeugmassendichte $\mu_s = 2\,G/g \varrho s F$ eingeführt und s/V und l/V mit folgenden Beziehungen eliminiert:

$$\frac{s}{V} = \frac{T_F}{\mu_s}\,, \qquad k_s = \frac{l}{s}\,, \qquad \frac{l}{V} = \frac{T_F k_s}{\mu_s}\,.$$

Dann wird die Gleichung (7) nach den Variablen ω_x, ω_z und $v_{y\,g}$ geordnet und lautet endgültig

$$\left.\begin{aligned} -\dot{\omega}_z c_{qz} \frac{T_F}{\mu_s} - \omega_z \left(c_{q\beta} - \omega_y c_{qx} \frac{T_F}{\mu_s} - c_s \frac{a}{l} \right) - \dot{\omega}_x c_{qx} \frac{T_F}{\mu_s} - \omega_x c_a \\ + \frac{\ddot{v}_{y\,g}}{V} T_F + \frac{\dot{v}_{y\,g}}{V} \left(c_{q\beta} - c_a \operatorname{tg} \gamma + c_s - \omega_y c_{qx} \frac{T_F}{\mu_s} \right) + \frac{v_{y\,g}}{V} c_s \frac{\mu_s}{T_F k_s} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

2. Die Momentengleichungen. Die Drehbewegungen um die Koordinatenachsen sind beim alleinfliegenden Flugzeug durch die *Euler*schen Gleichungen des starren Körpers bestimmt. Beim geschleppten Flugzeug tritt hierzu noch eine Koppelung der Drehbewegungen mit der Seitenbewegung des Flugzeugschwerpunktes durch die Seilseitenkraft und ihre Momente. Da die *Euler*schen Gleichungen hier nicht auf das Hauptträgheits-, sondern auf das experimentelle System bezogen werden, treten sie nicht in der einfachen bekannteren, sondern in allgemeiner Form auf, mit den linken Seiten[1]

$$\left.\begin{aligned} U_x &\equiv J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_x)\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}\dot{\omega}_z - \omega_y\left[-\omega_x(J_z - J_x)\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2} + \omega_z(J_y - J_z)\right], \\ U_z &\equiv J_z\dot{\omega}_z + (J_z - J_x)\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}\dot{\omega}_x - \omega_y\left[+\omega_x(J_x - J_y) + \omega_z(J_z - J_x)\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hierin bedeuten J_x, J_y, J_z die Trägheitsmomente um die experimentellen Achsen. Ausgedrückt durch die Hauptträgheitsmomente erhält man wegen $y \equiv y_f$

$$\left.\begin{aligned} J_x &= J_{xf}\cos^2\alpha + J_{zf}\sin^2\alpha, \qquad J_y \equiv J_{yf}, \\ J_z &= J_{xf}\sin^2\alpha + J_{zf}\cos^2\alpha, \\ (J_x - J_z)\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2} &= J_{xz} = (J_{xf} - J_{zf})\frac{\sin 2\alpha}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die Luftkraftmomente L um die x-Achse und N um die z-Achse setzen sich aus Anteilen zusammen, die von der Schiebe-, Roll- und Wendebewegung herrühren. Sie lauten unter Verwendung der aerodynamischen Beiwerte dieser Bewegungen

$$L \equiv -qFs\left[\beta c_{l\beta} + \frac{s\omega_{xa}}{V}c_{lx} + \frac{s\omega_{za}}{V}c_{lz}\right],$$

$$N \equiv -qFs\left[\beta c_{n\beta} + \frac{s\omega_{xa}}{V}c_{nx} + \frac{s\omega_{za}}{V}c_{nz}\right]$$

oder wegen $\omega_{za} \equiv \omega_z$ und $\omega_{xa} = \omega_x\cos\beta - \omega_y\sin\beta \approx \omega_x - \omega_y\beta$

$$\left.\begin{aligned} L &\equiv -qFs\left[\beta\left(c_{l\beta} - c_{lx}\frac{s\omega_y}{V}\right) + \frac{s\omega_x}{V}c_{lx} + \frac{s\omega_z}{V}c_{lz}\right], \\ N &\equiv -qFs\left[\beta\left(c_{n\beta} - c_{nx}\frac{s\omega_y}{V}\right) + \frac{s\omega_x}{V}c_{nx} + \frac{s\omega_z}{V}c_{nz}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Mit der Seilkraft (2) wird die Seitenkomponente der Seilkraft, bezogen auf die experimentelle y-Achse,

$$S_y = S\sin(\sigma - \chi\cos\gamma - \beta)$$
$$= qFc_s\frac{\sin(\sigma - \chi\cos\gamma - \beta)}{\cos(\sigma - \chi\cos\gamma)}. \quad \text{(Abb. 4).}$$

Für das Seilroll- und Seilgiermoment (Abb. 5) ergibt sich somit

$$L_{Seil} = +qFc_s h_e\frac{\sin(\sigma - \chi\cos\gamma - \beta)}{\cos(\sigma - \chi\cos\gamma)},$$

$$N_{Seil} = +qFc_s a_e\frac{\sin(\sigma - \chi\cos\gamma - \beta)}{\cos(\sigma - \chi\cos\gamma)}.$$

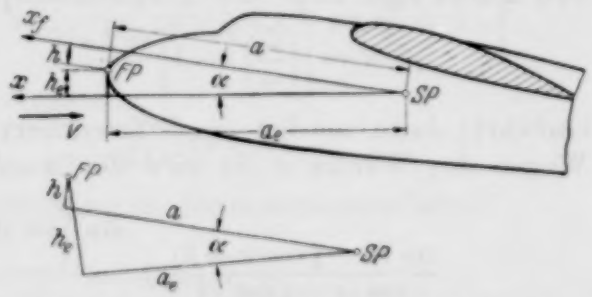

Abb. 5. Koordinaten des Fesselungspunktes am geschleppten Flugzeug. $h > 0$ Fesselungspunkt oberhalb des Schwerpunktes, $a > 0$ Fesselungspunkt vor dem Schwerpunkt (in der Abbildung oben ist h negativ). $h_e = h\cos\alpha + a\sin\alpha$, $a_e = a\cos\alpha - h\sin\alpha$.

An Stelle der auf das experimentelle System bezogenen Größen h_e und a_e werden die auf das flugzeugfeste System bezogenen Größen h und a mit der Transformation

$$h_e = h\cos\alpha + a\sin\alpha, \qquad a_e = -h\sin\alpha + a\cos\alpha$$

sowie die aerodynamischen Formbeiwerte der Seilmomente c_{ls} und c_{ns} eingeführt. Dann lauten

[1] *H. Scholz*, Jahrbuch 1940 der deutschen Luftfahrtforschung, S. I 433.

die Seilmomentengleichungen

$$\left.\begin{aligned} L_{Seil} &= + qFs\, c_{l_s} \frac{\sin(\sigma - \chi\cos\gamma - \beta)}{\cos(\sigma - \chi\cos\gamma)}, \\ N_{Seil} &= + qFs\, c_{n_s} \frac{\sin(\sigma - \chi\cos\gamma - \beta)}{\cos(\sigma - \chi\cos\gamma)}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Mit (9), (11) und (12) lauten nun die *Euler*schen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_x)\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}\dot{\omega}_z - \omega_y\left[-\omega_x(J_z - J_x)\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2} + \omega_z(J_y - J_z)\right] \\ &\quad = -qFs\left[\beta\left(c_{l\beta} - c_{lx}\frac{s\,\omega_y}{V}\right) + \frac{s\,\omega_x}{V}c_{lx} + \frac{s\,\omega_z}{V}c_{lz} - c_{l_s}\frac{\sin(\sigma - \chi\cos\gamma - \beta)}{\cos(\sigma - \chi\cos\gamma)}\right], \\ &J_z\dot{\omega}_z + (J_z - J_x)\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}\dot{\omega}_x - \omega_y\left[\omega_x(J_x - J_y) + \omega_z(J_z - J_x)\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}\right] \\ &\quad = -qFs\left[\beta\left(c_{n\beta} - c_{nx}\frac{s\,\omega_y}{V}\right) + \frac{s\,\omega_x}{V}c_{nx} + \frac{s\,\omega_z}{V}c_{nz} - c_{n_s}\frac{\sin(\sigma - \chi\cos\gamma - \beta)}{\cos(\sigma - \chi\cos\gamma)}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

In diesen Gleichungen werden die Seitenstabilitätsgrößen T_F und μ_s in folgender umgeformter Weise eingeführt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{J_x}{qFs} &= \frac{2Gi_x^2}{g\varrho V^2 Fs} = T_F\left(\frac{i_x}{s}\right)^2\frac{s}{V} = \frac{T_F^2}{\mu_s}\left(\frac{i_x}{s}\right)^2 \\ \frac{J_z}{qFs} &= \frac{T_F^2}{\mu_s}\left(\frac{i_z}{s}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Ferner werden die Gleichungen (13) mit $\mu_s = T_F\frac{V}{s}$ multipliziert und durch $\left(\frac{i_x}{s}\right)^2$ bzw. $\left(\frac{i_z}{s}\right)^2$ dividiert. Dann nehmen sie die Form an

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\omega}_x T_F^2 + \left[\left(\frac{i_z}{i_x}\right)^2 - 1\right]\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}T_F^2\dot{\omega}_z - \omega_y\left\{-\omega_x\left[\left(\frac{i_z}{i_x}\right)^2 - 1\right]\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}T_F^2 + \omega_z\frac{J_y - J_z}{J_x}T_F^2\right\} \\ &= -\left\{\beta\left[c_{l\beta}\left(\frac{s}{i_x}\right)^2\mu_s - c_{lx}\left(\frac{s}{i_x}\right)^2 T_F\omega_y\right] + \omega_x T_F c_{lx}\left(\frac{s}{i_x}\right)^2 + \omega_z T_F c_{lz}\left(\frac{s}{i_x}\right)^2 - \mu_s c_{l_s}\left(\frac{s}{i_x}\right)^2\frac{\sin(\sigma - \chi\cos\gamma - \beta)}{\cos(\sigma - \chi\cos\gamma)}\right\}; \\ &\dot{\omega}_z T_F^2 + \left[1 - \left(\frac{i_x}{i_z}\right)^2\right]\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}T_F^2\dot{\omega}_x - \omega_y\left\{\omega_x\frac{J_x - J_y}{J_z}T_F^2 + \omega_z\left[1 - \left(\frac{i_x}{i_z}\right)^2\right]T_F^2\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}\right\} \\ &= -\left\{\beta\left[c_{n\beta}\left(\frac{s}{i_z}\right)^2\mu_s - c_{nx}\left(\frac{s}{i_z}\right)^2 T_F\omega_y\right] + \omega_x T_F c_{nx}\left(\frac{s}{i_z}\right)^2 + \omega_z T_F c_{nz}\left(\frac{s}{i_z}\right)^2 - \mu_s c_{n_s}\left(\frac{s}{i_z}\right)^2\frac{\sin(\sigma - \chi\cos\gamma - \beta)}{\cos(\sigma - \chi\cos\gamma)}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Diese Gleichungen werden vereinfacht, indem man die Momentenzahlen und die Einflußzahlen von Form und Lage der Trägheitsellipse

$$\varkappa_l = \left[\left(\frac{i_z}{i_x}\right)^2 - 1\right]\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}, \qquad \varkappa_n = \left[1 - \left(\frac{i_x}{i_z}\right)^2\right]\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}, \qquad \varkappa_\alpha = \frac{1}{1 - \varkappa_l\varkappa_n} \tag{16}$$

einführt; dann werden sie differentiiert, um die Ausdrücke β, χ und σ eliminieren zu können. Wegen des Wertes σ (5) wird der Ausdruck rechts in (15)

$$\frac{\sin(\sigma - \chi\cos\gamma - \beta)}{\cos(\sigma - \chi\cos\gamma)} = \frac{\sin\left\{\operatorname{arc\,sin}\left[-\frac{y_g}{l} - \sin(\chi\cos\gamma + \beta)\frac{a}{l}\right] - \chi\cos\gamma - \beta\right\}}{\cos\left\{\operatorname{arc\,sin}\left[-\frac{y_g}{l} - \sin(\chi\cos\gamma + \beta)\frac{a}{l}\right] - \chi\cos\gamma\right\}}.$$

Hierfür kann man mit großer Näherung schreiben

$$\frac{\sin(\sigma - \chi\cos\gamma - \beta)}{\cos(\sigma - \chi\cos\gamma)} = -\left[\frac{y_g}{l} + (\chi\cos\gamma + \beta)\left(1 + \frac{a}{l}\right)\right].$$

Mit $\omega_z = \dot{\chi}\cos\gamma + \dot{\beta}$ ergibt sich schließlich für den differentiierten Quotienten

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\sin(\sigma - \chi\cos\gamma - \beta)}{\cos(\sigma - \chi\cos\gamma)}\right\} = -\frac{v_{y\,g}}{l} - \omega_z\left(1 + \frac{a}{l}\right).$$

Nach Eliminierung der Größen $\dot{\beta}$, χ und σ und Einführung des Ausdrucks $V/l = \mu_s T_F k_s$

werden die differentiierten Gleichungen (15) geordnet und lauten schließlich

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{\omega}_x T_F^2 + \dot{\omega}_x T_F (l_x + \omega_y \varkappa_l T_F) + \ddot{\omega}_z \varkappa_l T_F^2 + \dot{\omega}_z T_F \left(l_z - \frac{J_y - J_z}{J_x} \omega_y T_F\right) \\
&\quad + \omega_z \left[l_\beta \mu_s - l_x \omega_y T_F + l_z \mu_s \left(1 + \frac{a}{l}\right)\right] - \frac{\dot{v}_{yg}}{V}\left[l_\beta \mu_s - l_x \omega_y T_F\right] + \frac{v_{yg} l_z \mu_s^2}{V T_F k_s} \\
&\quad + \left\{\dot{\omega}_y T_F \left[\omega_x \varkappa_l T_F - \omega_z \frac{J_y - J_z}{J_x} T_F - \beta l_x\right]\right\} = 0 , \\
&\ddot{\omega}_z T_F^2 + \dot{\omega}_z T_F (n_z - \omega_y \varkappa_n T_F) + \omega_z \left[n_\beta \mu_s + n_x \omega_y T_F + n_z \mu_s \left(1 + \frac{a}{l}\right)\right] \\
&\quad + \ddot{\omega}_x \varkappa_n T_F^2 + \dot{\omega}_x T_F \left(n_x - \frac{J_x - J_y}{J_z} \omega_y T_F\right) - \frac{\dot{v}_{yg}}{V}\left[\mu_s n_\beta - n_x \omega_y T_F\right] + \frac{v_{yg} n_z \mu_s^2}{V T_F k_s} \\
&\quad + \left\{\dot{\omega}_y T_F \left[\omega_z \varkappa_n T_F - \omega_x \frac{J_x - J_y}{J_z} T_F - \beta n_x\right]\right\} = 0 .
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Die geschweiften Klammern in (17) sind wegen des Faktors $\dot{\omega}_y$ nahezu gleich Null und werden später vernachlässigt.

Zu den Massen- und Drehbeschleunigungsgliedern ($\sim \dot{v}_{yg}, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_z$) und den Luftkräften und -Momenten ($\sim v_{yg}, \omega_x, \omega_z$) der Differentialgleichungen des alleinfliegenden Flugzeugs treten beim geschleppten Flugzeug die Seilkräfte und -Momente ($\sim y_g$).

3. Vereinfachung der Differentialgleichungen und dimensionslose Darstellung ihrer Veränderlichen. In den Differentialgleichungen der Seitenbewegung sind eine Anzahl kleinerer Größen mit ω_y und $\dot{\omega}_y$ enthalten, die im allgemeinen vernachlässigt werden können. Ferner ist es zweckmäßig, die Veränderlichen ω_x, ω_z und v_{yg} in folgender Weise dimensionslos darzustellen:

$$\begin{aligned}
\omega_x T_F &= p , & \omega_z T_F &= r , & (v_{yg}/V)\,\mu_s &= v , \\
\dot{\omega}_x T_F^2 &= \dot{p} , & \dot{\omega}_z T_F^2 &= \dot{r} , & (\dot{v}_{yg}/V)\,\mu_s T_F &= \dot{v} , \\
\ddot{\omega}_x T_F^3 &= \ddot{p} , & \ddot{\omega}_z T_F^3 &= \ddot{r} , & (\ddot{v}_{yg}/V)\,\mu_s T_F^2 &= \ddot{v} .
\end{aligned}$$

Mit Vernachlässigung der Korrekturgrößen und dimensionsloser Darstellung der Veränderlichen lauten die drei Differentialgleichungen (8), (17), nachdem sie zuvor mit T_F und die Seitenkraftgleichung außerdem mit μ_s erweitert worden sind,

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{p} + \dot{p} l_x + \varkappa_l \ddot{r} + \dot{r} l_z + r \mu_s \left[l_\beta + l_z \left(1 + \frac{a}{l}\right)\right] - \dot{v} l_\beta + v l_z \frac{\mu_s}{k_s} &= 0 , \\
k \ddot{p} + \dot{p} n_x + \ddot{r} + \dot{r} n_z + r \mu_s \left[n_\beta + n_z \left(1 + \frac{a}{l}\right)\right] - \dot{v} n_\beta + v n_z \frac{\mu_s}{k_s} &= 0 , \\
-\dot{p} c_{qx} - p c_a \mu_s - \dot{r} c_{qz} - r \mu_s \left(c_{q\beta} - c_z \frac{a}{l}\right) + \ddot{v} + \dot{v}(c_{q\beta} - c_a \operatorname{tg} \gamma + c_z) + v c_z \frac{\mu_s}{k_s} &= 0 .
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

e) Die Frequenz-Gleichung. Mit dem Ansatz

$$p = C_p e^{\lambda t/T_F} , \qquad r = C_r e^{\lambda t/T_F} , \qquad v = C_v e^{\lambda t/T_F}$$

erhält man aus (18) die folgende charakteristische Gleichung in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix}
\lambda^2 + \lambda l_x & \lambda^2 \varkappa_l + \lambda l_z + \mu_s \left[l_\beta + l_z \left(1 + \frac{a}{l}\right)\right] & -\lambda l_\beta + l_z \frac{\mu_s}{k_s} \\
\lambda^2 \varkappa_n + \lambda n_x & \lambda^2 + \lambda n_z + \mu_s \left[n_\beta + n_z \left(1 + \frac{a}{l}\right)\right] & -\lambda n_\beta + n_z \frac{\mu_s}{k_s} \\
-\lambda c_{qx} - c_a \mu_s & -\lambda c_{qz} - \mu_s \left(c_{q\beta} - c_z \frac{a}{l}\right) & \lambda^2 + \lambda (c_{q\beta} - c_a \operatorname{tg} \gamma + c_z) + c_z \frac{\mu_s}{k_s}
\end{vmatrix} = 0 . \quad (19)$$

Die Ausrechnung der Determinante ergibt die folgende Frequenzgleichung sechsten Grades:

$$A_0 \lambda^6 + A_1 \lambda^5 + A_2 \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_4 \lambda^2 + A_5 \lambda + A_6 = 0 . \quad (20)$$

Diese Frequenzgleichung ist um zwei Grade höher als diejenige des alleinfliegenden Flugzeugs. Die Koeffizienten lauten, nachdem sie mit $\varkappa_x = 1/(1 - \varkappa_l \varkappa_n)$ multipliziert worden sind, um

$A_0 = 1$ setzen zu können.

$$
\left.\begin{aligned}
A_1 &= \varkappa_\alpha [l_x + \varkappa_l n_x + n_z + \varkappa_n l_z] + c_{q\beta} - c_a \operatorname{tg}\gamma + \underline{c_s}\,,\\
A_2 &= \varkappa_\alpha \Big\{ l_x n_z - n_x l_z + (c_{q\beta} - c_a \operatorname{tg}\gamma + \underline{c_s})(l_x - \varkappa_l n_x + n_z - \varkappa_n l_z) - c_{qz}(n_\beta - \varkappa_n l_\beta)\\
&\quad - c_{qx}(l_\beta - \varkappa_l n_\beta) + \mu_s (n_\beta - \varkappa_n l_\beta) + \underline{\mu_s \Big(1 + \frac{a}{l}\Big)(n_s - \varkappa_n l_s)} \Big\} + c_s \frac{\mu_s}{k_s}\,,\\
A_3 &= \varkappa_\alpha \Big\{ (c_{q\beta} - c_a \operatorname{tg}\gamma + \underline{c_s})(l_x n_z - n_x l_z) + \mu_s (l_x n_\beta - n_x l_\beta) - c_{qz}(l_x n_\beta - n_x l_\beta) - c_{qx}(l_\beta n_z - n_\beta l_z)\\
&\quad - c_a \mu_s (l_\beta - \varkappa_l n_\beta) - c_a \operatorname{tg}\gamma\, \mu_s (n_\beta - \varkappa_n l_\beta) + \underline{\mu_s \Big(1 + \frac{a}{l}\Big)[(c_{q\beta} - c_a \operatorname{tg}\gamma + c_s)(n_s - \varkappa_n l_s) + l_x n_s}\\
&\quad \underline{- n_x l_s + c_s (n_\beta - \varkappa_n l_\beta)]} + \frac{\mu_s}{k_s}[(n_s - \varkappa_n l_s) c_{qz} + (l_s - \varkappa_l n_s) c_{qx}] + \underline{\frac{c_s \mu_s}{k_s}(l_x - \varkappa_l n_x + n_z - \varkappa_n l_z)} \Big\}\,,\\
A_4 &= \varkappa_\alpha \mu_s \Big\{ c_a (n_\beta l_z - l_\beta n_z) + \Big[\underline{c_s \Big(1 + \frac{a}{l}\Big)} - c_a \operatorname{tg}\gamma\Big](n_\beta l_x - l_\beta n_x) + \underline{(c_{q\beta} - c_a \operatorname{tg}\gamma + c_s)\Big(1 + \frac{a}{l}\Big)}\\
&\quad \underline{\cdot (l_x n_s - n_x l_s)} - c_{qx}\Big(1 + \frac{a}{l}\Big)(l_\beta n_s - n_\beta l_s) + \underline{\frac{c_s}{k_s}(l_x n_z - n_x l_z)} + \underline{\frac{c_{qx}}{k_s}(l_s n_z - n_s l_z)}\\
&\quad \underline{+ \frac{c_{qz}}{k_s}(l_x n_s - n_x l_s)} + \underline{\frac{\mu_s}{k_s}[c_s (n_\beta - \varkappa_n l_\beta) + (c_{q\beta} + c_s)(n_s - \varkappa_n l_s) + c_a (l_s - \varkappa_l n_s)]} \Big\}\,,\\
A_5 &= \varkappa_\alpha \mu_s^2 \Big\{ \underline{\frac{1}{k_s}[(c_{q\beta} + c_s)(l_x n_s - n_x l_s) + c_s (l_x n_\beta - n_x l_\beta) + c_{qx}(l_s n_\beta - n_s l_\beta) - c_a (l_z n_s - n_z l_s)]}\\
&\quad \underline{+ c_a (l_s n_\beta - n_s l_\beta)\Big(1 + \frac{a}{l}\Big)} \Big\}\,,\\
A_6 &= \varkappa_\alpha \mu_s^3 \underline{\frac{c_a}{k_s}\Big(1 + \frac{a}{l}\Big)(l_s n_\beta - n_s l_\beta)}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{21}
$$

Die nicht unterstrichenen Glieder ergeben die Koeffizienten der Frequenzgleichung des alleinfliegenden Flugzeuges. Hierzu treten die von den Seilkräften und -Momenten herrührenden unterstrichenen Glieder für die Frequenzgleichung des geschleppten Flugzeuges. Die Einflußgrößen der Trägheitsellipse $\varkappa_l$, $\varkappa_n$ sind im allgemeinen so klein, daß man sie vernachlässigen kann (siehe Tafel I).

f) Stabilitätsbedingungen der Frequenzgleichung. Für Stabilitätsbetrachtungen ist es häufig nicht erforderlich, die einzelnen Wurzeln zahlenmäßig auszurechnen, sondern es genügt, die Grenzen zu bestimmen, innerhalb derer Stabilität vorhanden ist. Die Seitenstabilität eines geschleppten Flugzeuges ist gegeben, wenn sämtliche Wurzeln der Frequenzgleichung einen negativen Realteil haben. Hierfür gilt die Bedingung[1], daß sämtliche Koeffizienten und die folgenden Determinanten (für die Gleichung sechsten Grades) positiv sein müssen:

$$
\left.\begin{aligned}
&D_1 = A_1\,, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_0 \\ A_3 & A_2 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_0 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ A_5 & A_4 & A_3 \end{vmatrix},\\
&D_4 = \begin{vmatrix} A_1 & A_0 & 0 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ A_5 & A_4 & A_3 & A_2 \\ 0 & A_6 & A_5 & A_4 \end{vmatrix}, \qquad D_5 = \begin{vmatrix} A_1 & A_0 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 \\ A_5 & A_4 & A_3 & A_2 & A_1 \\ 0 & A_6 & A_5 & A_4 & A_3 \\ 0 & 0 & 0 & A_6 & A_5 \end{vmatrix},
\end{aligned}\right\} \tag{22}
$$

Bei Instabilität der Seitenbahnschwingung ist nur die Determinante D_5 negativ. Sie muß also positiv werden, um Stabilität zu erzielen. Rechnet man die Determinante D_5 aus, so ergibt sich

$$
A_3 A_6 - A_5 A_4 + \frac{A_5^2}{A_1} - \frac{[A_5 (A_2 - A_3/A_1) - A_1 A_6]^2}{A_1 A_4 - A_5 - A_3 A_2 + A_3^2/A_1} \geq 0\,.
$$

[1] *H. Bilharz*, Z. angew. Math. Mech. **21** (1941), S. 96.

Darin ist $A_1 A_4 - A_5$ gegenüber $- A_3 A_2 + A_3^2/A_1$ klein (etwa 1,5%). Multipliziert man das Quadrat im Zähler aus, so ist ebenfalls $A_1^2 A_6^2$ gegenüber den vorhergehenden Gliedern klein (1,5%). Bei Vernachlässigung der kleinen Glieder und nach Umrechnung ergibt sich als Bedingung für Stabilität der Seitenbahnschwingung

$$A_3^2 A_6 - A_3 A_4 A_5 + A_2 A_5^2 - 2 A_1 A_5 A_6 \geq 0 . \tag{23}$$

Eine explizite Darstellung und allgemeine Diskussion dieser Gleichung unter Verwendung der Ausdrücke für die einzelnen Koeffizienten ist nicht möglich. Will man jedoch die Stabilitätsgrenzen für zwei Variable bestimmen z. B. k_s oder c_a über l_β, so erhält man, da die einzelnen Koeffizienten lineare Glieder mit l_β enthalten, eine kubische Gleichung, aus der für jedes c_a und k_s das zugehörige l_β errechnet werden kann.

Die Stabilitätsbedingung für die statische Stabilität lautet

$$A_6 = \varkappa_\alpha (\mu_s^3/k_s)\, c_a (l_s n_\beta - n_s l_\beta) \geq 0 .$$

Folglich ist

$$l_s n_\beta - n_s l_\beta \geq 0 .$$

Ersetzt man die Momentenzahlen durch die aerodynamischen Formbeiwerte und kürzt verschiedene konstante Glieder, so lautet diese Gleichung

$$c_{n\beta}\left(\frac{h}{a} + \operatorname{tg}\alpha\right) - c_{l\beta}\left(-\frac{h}{a}\operatorname{tg}\alpha + 1\right) \geq 0 . \tag{24}$$

Befindet sich der Fesselungspunkt im Rumpfbug auf einer Horizontalen vor dem Schwerpunkt ($h_e = 0$, $a_e > 0$), so muß sein

$$- c_{l\beta} = + \delta c_L/\delta\beta \geq 0 .$$

Diese Bedingung ist durch entsprechende V-Form zu erfüllen. Befindet sich der Fesselungspunkt über dem Schwerpunkt ($a_e = 0$, $h_e > 0$), so muß sein

$$c_{n\beta} = - \delta c_N/\delta\beta \geq 0 .$$

Diese Bedingung ist bei Richtungsstabilität des Flugzeuges erfüllt. Bei Fesselung im Schwerpunkt ergibt sich statische Indifferenz.

g) Spezialfälle. Da der Rechnungsaufwand zur Bestimmung der Koeffizienten und zur Lösung der Frequenzgleichung sechsten Grades sehr hoch ist, wurde untersucht, ob nicht einige Spezialfälle mit geringerer Zahl von Freiheitsgraden als Näherungslösungen dienen könnten.

Bei der Berechnung der Schwerpunktsbewegung eines geschleppten Flugzeuges ohne Berücksichtigung der Roll- und Gierbewegung (ein Freiheitsgrad), also bei $\omega_x = \omega_z = 0$ ergibt sich eine quadratische Frequenzgleichung, deren konjugiert komplexes Wurzelpaar die Seitenbahnschwingung charakterisiert.

Bei der Berechnung der Schwerpunkts- und Rollbewegung eines geschleppten Flugzeuges ohne Berücksichtigung der Gierbewegung (zwei Freiheitsgrade), also bei $\omega_z = 0$ ergibt sich eine Frequenzgleichung vierten Grades, deren reelle Wurzeln die Rolldämpfung und statische Stabilität im Schleppflug und deren konjungiert komplexes Wurzelpaar die Seitenbahnschwingung charakterisiert[1].

Bei der Berechnung der Schwerpunkts- und Gierbewegung eines geschleppten Flugzeuges ohne Berücksichtigung der Rollbewegung (zwei Freiheitsgrade), also bei $\omega_x = 0$ ergibt sich eine Frequenzgleichung vierten Grades, deren konjugiert komplexe Wurzelpaare die Gierschwingung und Seitenbahnschwingung charakterisieren.

Bei der Berechnung der Roll- und Schwerpunktsbewegung eines geschleppten Flugzeuges, wobei die Gierbewegung starr mit der Schwerpunktsbewegung gekoppelt ist (zwei Freiheitsgrade) ergibt sich eine Frequenzgleichung vierten Grades, deren reelle Wurzeln die Rolldämpfung und statische Stabilität und deren konjugiert komplexes Wurzelpaar die Seitenbahnschwingung charakterisieren.

Ein zahlenmäßiger Vergleich der Wurzeln der Spezialfälle mit denen der allgemeinen Frequenzgleichung ergab, daß in keinem Falle die Seitenbahnschwingung und die statische Stabilität auch nur annähernd richtig wiedergegeben wurden. Der Einfluß der Gierbewegung wie

[1] Dieser Fall ist identisch mit der von *Solf* (siehe Fußnote 1 von Seite 245) durchgeführten Rechnung, bei dem eine Fesselung in einer vertikalen Geraden durch den Schwerpunkt angenommen und die Gierschwingung vernachlässigt worden war.

der Rollbewegung auf die gesamte Seitenstabilität ist so groß, daß man keine von beiden vernachlässigen kann, ohne die Ergebnisse vollkommen zu fälschen. Es sind also auf diese Weise keine Näherungslösungen zu finden, und es bleibt notwendig, die Lösung der vollständigen Frequenzgleichung sechsten Grades mit allen angesetzten Freiheitsgraden zu suchen.

4. Bestimmung der Luft- und Seil-Kräfte und Momente. Die Bestimmung der Beiwerte der einzelnen Luftkräfte und -momente ist ein wichtiger und schwieriger Anteil der Seitenstabilitätsrechnung. Die vom Schiebewinkel abhängigen Beiwerte, Schiebeseitenkraft $c_{q\beta}$, Schieberollenmoment $c_{l\beta}$ und die Richtungsstabilität $c_{n\beta}$ sind durch Sechskomponenten-Messungen im Windkanal zu gewinnen. Der Einfluß von Änderungen der Flügelgestalt und der V-Form, der Rumpfform und -länge sowie der Seitenleitwerksfläche kann aber in einfacher Form rechnerisch erfaßt werden[1]. Die von der Roll- und Wendewinkelgeschwindigkeit abhängigen Beiwerte, Rollgiermoment c_{nx}, Rolldämpfung c_{lx}, Wendedämpfung c_{nz} und Wenderollmoment c_{lz} sind bis heute fast ausschließlich rechnerisch gewonnen worden[2]. Die Beiwerte der Rollseitenkraft c_{qx} und Wendeseitenkraft c_{qz} sind sehr klein und werden im folgenden als für die Rechnungsergebnisse unbedeutend vernachlässigt. Die Seilkraft- und Seilmomentenbeiwerte sind in einfacher Form rechnerisch zu gewinnen. Die Seilseitenkraft c_s ist eine Funktion der aerodynamischen Güte und des Steigwinkels des geschleppten Flugzeuges. Das Seilgiermoment c_{ns} und das Seilrollmoment c_{ls} sind außerdem von der geometrischen Lage des Fesselungspunktes gegenüber dem Schwerpunkt abhängig (Abb. 5). Bei Fesselung im Rumpfbug ist das Seilgiermoment die entscheidende Größe.

5. Lösung der Frequenzgleichung. Bei dem komplizierten Aufbau der allgemeinen Frequenzgleichung ist es nur schwer möglich, aus den Koeffizienten oder aus den Luft- und Seilkraftbeiwerten Aussagen über die Wurzeln der Frequenzgleichung und damit über die Seitenbewegung des geschleppten Flugzeuges zu machen. Man muß daher zahlreiche systematische Beispiele durchrechnen, um den Einfluß einiger Variablen des Flugzustandes und von konstruktiven Größen auf die Seitenstabilität zu erkennen. Zur numerischen Lösung der Frequenzgleichung wurde erstens das *Gräffe*sche Verfahren[3] benützt, welches gestattet, die Wurzeln mit beliebiger Genauigkeit auszurechnen. Dieses Verfahren ist jedoch langwierig und bietet im Lauf der Rechnung keine Möglichkeit einer Fehlerkontrolle. Deswegen wurden noch Näherungslösungen zur Ermittlung einzelner Wurzeln gesucht.

a) Näherungslösungen für die Wurzeln der Frequenzgleichung. Der numerischen Rechnung wurden die aerodynamischen und konstruktiven Daten des Lastenseglers Go 242 zugrunde gelegt (Abb. 6). Die Koeffizienten und Wurzeln der Frequenzgleichung haben für dieses Flugzeug bei 5500 kg Fluggewicht, einem Auftriebsbeiwert $c_a = 0{,}436$ und relativer Seillänge $k_s = 6$ folgende Größen: $A_1 = 18{,}7$, $A_2 = 52{,}4$, $A_3 = 316{,}1$, $A_4 = 24{,}8$, $A_5 = 74{,}7$, $A_6 = 40{,}0$, Rolldämpfungswurzel $\lambda_1 = -16{,}7$, Gierschwingung $\lambda_{23} = -1{,}0 \pm 4{,}2\,i$, Seitenbahnschwingung $\lambda_{45} = +0{,}17 \pm 0{,}56\,i$, statische Stabilität $\lambda_6 = -0{,}37$. Auch für andere Fluggewichte, Auftriebsbeiwerte und Seillängen wie überhaupt für andere Baumuster verhalten sich die Größenordnungen der einzelnen Wurzeln ähnlich wie in dem angeführten Beispiel. Sie sind also bis auf den Unterschied zwischen λ_{45} und λ_6 zahlenmäßig sehr verschieden. Daraus geht hervor, daß die großen Wurzeln λ_1 und λ_{23} in erster Linie von den Koeffizienten A_1 bis A_3, die kleinen Wurzeln λ_{45} und λ_6 dagegen von den Koeffizienten A_3 bis A_6 der Frequenzgleichung bestimmt werden. Für die Näherungslösungen benützt man diese Tatsache, indem man die Frequenzgleichung sechsten Grades (20) in zwei kubische Gleichungen zerfallen läßt:

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0\,, \tag{25}$$

$$\lambda^3 + \frac{A_4}{A_3}\lambda^2 + \frac{A_5}{A_3}\lambda + \frac{A_6}{A_3} = 0\,. \tag{26}$$

Aus der ersten kubischen Gleichung (25) errechnet man die große Rolldämpfungswurzel λ_1

[1] *H. Scharn*, Systematisch-kritische Beispielrechnungen zur Seitenstabilität des Flugzeuges, Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen, UM-Bericht Nr. 2032, 1943; *H. Schlichting*, Aerodynamik der gegenseitigen Beeinflussung der Flugzeugteile, Monographie des M.O.S. (A), Völkenrode, Reports and Translations No. 171 (176). Bericht 46/5 des Instituts für Strömungsmechanik der TH Braunschweig.

[2] *G. Mathias*, Z. Flugt. Motorluftsch., 23 (1932), S. 224; *H. Henn* und *H. Weiler*, Untersuchung über die Seitenbewegung von Flugzeugen, Vorabdruck zum Jahrb. 1943 der deutschen Luftfahrtforschung, Techn. Berichte 11 (1944), Nr. 3.

[3] *F. A. Willers*, Methoden der praktischen Analysis.

und das Wurzelpaar der Gierschwingung λ_{23}, aus der zweiten kubischen Gleichung (26) das Wurzelpaar der Seitenbahnschwingung λ_{45} und die kleine Wurzel der statischen Stabilität λ_6.

Eine erste Näherungslösung für λ_6 gewinnt man aus (26) mit Hilfe eines Nomogramms und verbessert sie nach dem *Horner*schen Schema. (Da die Wurzeln λ_{45} und λ_6 von gleicher Größenordnung sind, ist der Ausdruck $\lambda_6 = -A_6/A_5$ als erste Näherung zu ungenau.)

Dann kann man $\lambda_{45} = u_{45} \pm i w_{45}$ mit Hilfe der *Vieta*schen Beziehungen, angewandt für (26), errechnen. Es ist

$$2\,u_{45} + \lambda_6 = -\frac{A_4}{A_3}\,, \qquad r_{45}^2\,\lambda_6 = -\frac{A_6}{A_3}\,, \qquad w_{45} = \sqrt{r_{45}^2 - u_{45}^2}\,. \tag{27}$$

Für λ_1 wurde von *Scharn*[1] die Näherungslösung

$$\lambda_1 = -A_1 + \frac{A_2}{A_1} - \frac{A_3}{A_1} \tag{28}$$

angegeben. Diese Näherung genügt durchaus, wenn man λ_1 für sich allein betrachtet. Da man jedoch λ_1 zur Berechnung der anderen Wurzeln wieder benötigt, empfiehlt es sich, λ_1 durch das *Horner*sche Schema bezogen auf (25) zu verbessern.

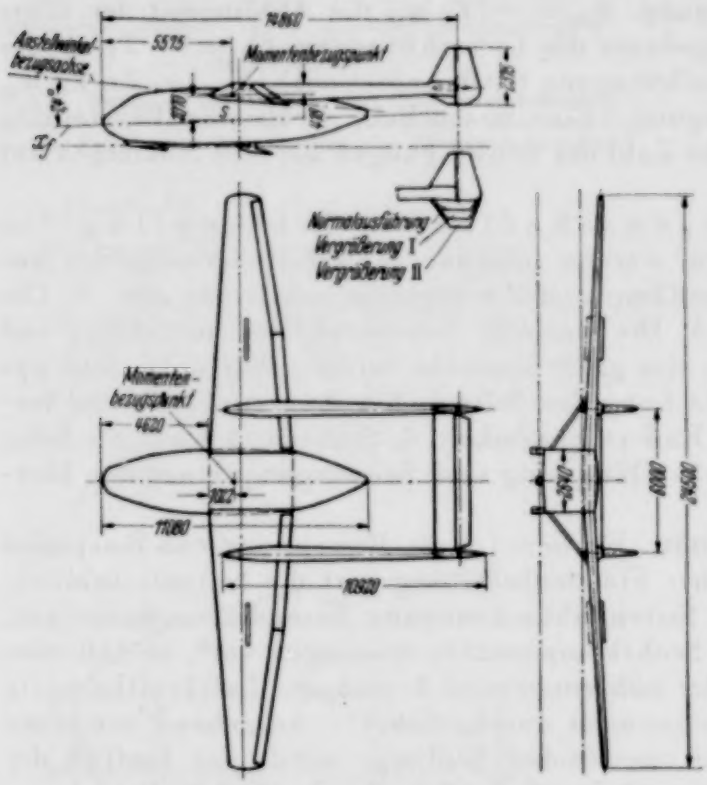

Abb. 6. Übersichtsskizze des Lastenseglers Go 242.

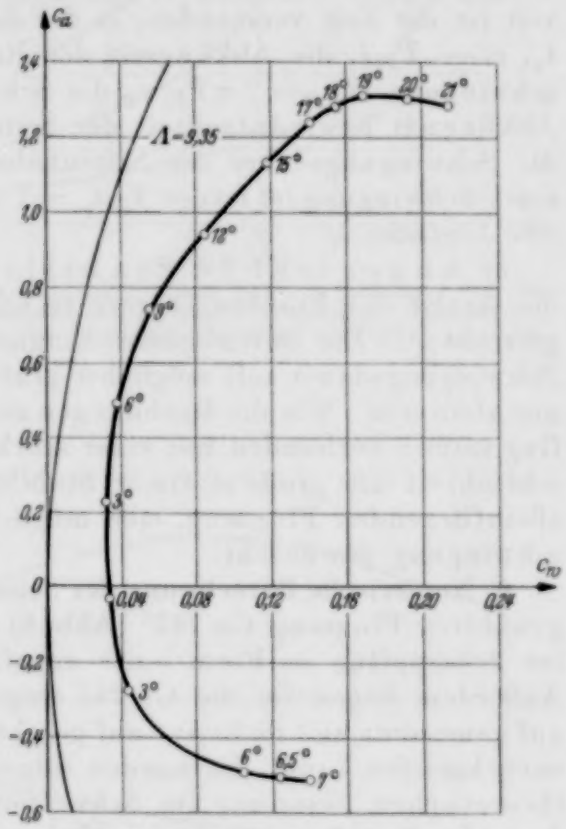

Abb. 7. Polare des Lastenseglers Go 242.

Nachdem alle Wurzeln bis auf $\lambda_{23} = u_{23} \pm i\,w_{23}$ bekannt sind, kann man zur Bestimmung von u_{23} die *Vieta*sche Beziehung für die gesamte Frequenzgleichung (20) heranziehen:

$$\lambda_1 + 2\,u_{23} + 2\,u_{45} + \lambda_6 = -A_1\,, \qquad u_{23} = \frac{-A_1 - \lambda_1 - \lambda_6}{2} - u_{45}\,. \tag{29}$$

Ferner ist angenähert nach den *Vieta*schen Beziehungen für (25)

$$r_{23}^2\,\lambda_1 = -A_3\,, \qquad w_{23} = \sqrt{r_{23}^2 - u_{23}^2}\,.$$

Ein Vergleich der nach diesen Näherungsformeln und nach dem *Gräffe*schen Verfahren berechneten Lösungen ergab für eine Reihe von Beispielen, bei denen der Auftriebsbeiwert und die V-Form variiert wurden, folgende Fehler der Näherungslösung:

		λ_1	u_{23}	w_{23}	u_{45}	w_{45}	λ_6
größter Fehler	%	0,04	—3,7	1,2	—19,2	2,9	—4,2
mittlerer Fehler	%	0,02	—2,9	1,1	—16,6	1,7	—1,4

[1] Siehe Fußnote 2 von S. 256.

Die Übereinstimmung ist befriedigend genau bis auf den Fehler der Anfachung der Seitenbahnschwingung u_{45}. Für manche Untersuchungen genügen daher diese Näherungslösungen nicht. Man kann sie erheblich verbessern, wenn man für λ_6 das *Horner*sche Schema um zwei Stufen von (20) und für λ_1 um drei Stufen [auf die gesamte Gleichung (20)] erweitert. Die Beträge der konjugiert komplexen Wurzelpaare $r_{45}^2 = -A_6/A_3\lambda_6$ und $r_{23}^2 = -A_3/\lambda_1$ kann man verbessern, wenn man A_3 durch ein korrigiertes $\overline{A_3}$ ersetzt, für das folgende Beziehung gilt:

$$\overline{A_3} = A_3 - \frac{1}{A_3}\left(A_2 A_4 - 0{,}97\, A_1 A_5 - \frac{0{,}895\, A_2 A_5}{A_3} + 1{,}79\, A_1 A_5\right). \tag{30}$$

Diese Gleichung wurde aus dem *Gräffe*schen Verfahren abgeleitet. Das korrigierte $\overline{A_3}$ ist 1 bis 3,5%, im Mittel 1,5% kleiner als A_3. Der jetzt noch mögliche Fehler ist kleiner als 0,2%. Die reellen Anteile der beiden konjugiert komplexen Wurzelpaare sind schließlich mit Hilfe der *Vieta*schen Beziehungen für die gesamte Frequenzgleichung (20) zu errechnen.

b) Abklingzeiten und Schwingungsdauer der Seitenbewegungen. Aus den Wurzeln der Frequenzgleichung ergeben sich in bekannter Weise die Abkling- bzw. Anfachzeiten und die Schwingungsdauer der Seitenbewegungen. Unter Abklingzeit ist die Zeit verstanden, in der die Bewegung auf den $1/e$-fachen Wert abklingt. Es ist $t_{\varphi 1} = -T_F/\lambda_1$ die Abklingzeit der Rollbewegung, $t_{\varphi 23} = -T_F/u_{23}$ die Abklingzeit der Gierschwingung, $T_{\varphi 23} = 2\pi T_F/w_{23}$ die Schwingungsdauer der Gierschwingung, $t_{\varphi 45} = -T_F/u_{45}$ die Abklingzeit bzw. Anfachzeit der Seitenbahnschwingung (>0 Anfachzeit), $T_{\varphi 45} = 2\pi T_F/w_{45}$ die Schwingungsdauer der Seitenbahnschwingung. Eine wesentliche Größe zur Beurteilung einer Schwingung ist ferner $T_\varphi/t_\varphi = 2\pi u/w$ die Zahl der Schwingungen bis zum Abklingen auf das $1/e$-fache.

c) Angestrebte Stabilitätseigenschaften im Schleppflug. Um die Arbeit des Flugzeugführers zu erleichtern, werden folgende Stabilitätseigenschaften angestrebt: 1. Die Seitenbahnschwingung soll gedämpft oder wenigstens indifferent sein. 2. Die Schwingungsdauer soll möglichst groß sein. 3. Die statische Seitenstabilität im Schlepp soll nur klein sein. Wie die Rechnungen zeigen, ist eine große statische Seitenstabilität im Schleppflug immer verbunden mit einer starken Anfachung der Seitenbahnschwingung. Ferner verschlechtert eine große statische Stabilität die Ruderwirksamkeit. 4. Schließlich wird, wie beim alleinfliegenden Flugzeug, eine möglichst große Dämpfung und Schwingungsdauer der Gierschwingung gewünscht.

6. Numerische Berechnung der Seitenstabilität. Bei dem für die Berechnung von Beispielen gewählten Flugzeug Go 242[1] (Abb. 6) mit hoher Flächenbelastung tritt die Seiteninstabilität im Schleppflug in Form einer angefachten Seitenbahnschwingung besonders intensiv auf. Außerdem liegen für die Go 242 eingehende Sechskomponentenmessungen vor[2], so daß man auf gemessene und nicht nur auf geschätzte oder näherungsweise berechnete Luftkraftbeiwerte zurückgreifen kann. Es wurden folgende Rechnungen durchgeführt[3]: Ausgehend von einer theoretischen Fesselung im Schwerpunkt und unendlicher Seillänge wurde der Einfluß der Lage des Fesselungspunktes und der Seillänge auf das Entstehen des konjugiert komplexen Wurzelpaares λ_{45} der Seitenbahnschwingung und der reellen Wurzel λ_6 untersucht. Dann wurde der Einfluß der wesentlichsten Parameter des Flugzustandes und einiger konstruktiver Größen auf die Seitenstabilität bestimmt. Schließlich wurden mit Hilfe der *Routh*schen Stabilitätskriterien die Stabilitätsbereiche bei veränderlichen flugmechanischen und konstruktiven Größen festgestellt.

a) Einfluß der Seillänge und der Lage des Fesselungspunktes auf das Entstehen der Seitenbahnschwingung und auf die

[1] Auf diesem Baumuster konnte der Verfasser eingehende Flugerfahrungen unter verschiedenen klimatischen Verhältnissen und Ladezuständen sammeln. Unter ungünstigen Verhältnissen z. B. mit hoher Zuladung und bei großer Hitze, in der die Motorleistung des Schleppflugzeuges nachließ, oder auch bei kleinen Flugplätzen, auf denen der Flugzeugführer gezwungen war, zu früh abzuheben, ergaben sich zahlreiche Fehlstarts, die häufig zum Ausfall des betreffenden Flugzeugs führten.

[2] *H. Göthert*, Sechskomponentenmessungen an dem Windkanalmodell Go 242, Unveröffentlichter Bericht No. 82228 der Luftfahrtforschungsanstalt Braunschweig, 1943; *F. W. Scholkemeier*, Weitere Sechskomponentenmessungen an dem Windkanalmodell Go 242, Unveröffentlichter Bericht No. 82239 der Luftfahrtforschungsanstalt Braunschweig, 1943.

[3] Die in den Tabellen niedergelegten Flugzeugdaten, Beiwerte, Koeffizienten und Wurzeln der Frequenzgleichung mußten entfallen. Es wird auf die Dissertation des Verfassers, Braunschweig 1947, verwiesen.

statische Stabilität im Schlepp. Die Näherungsformeln für die Wurzeln bieten einen gewissen Anhaltspunkt, den Einfluß einzelner Koeffizienten auf bestimmte Wurzeln zu erkennen. Über den Aufbau der Koeffizienten selbst erhält man einen Überblick, wenn man sie in die Einflußgrößen der Tafel I zerlegt.

Ein mit unendlicher Seillänge und bei Fesselung im Schwerpunkt geschlepptes Flugzeug unterscheidet sich vom alleinfliegenden Flugzeug nur durch eine Änderung der Spiralwurzel

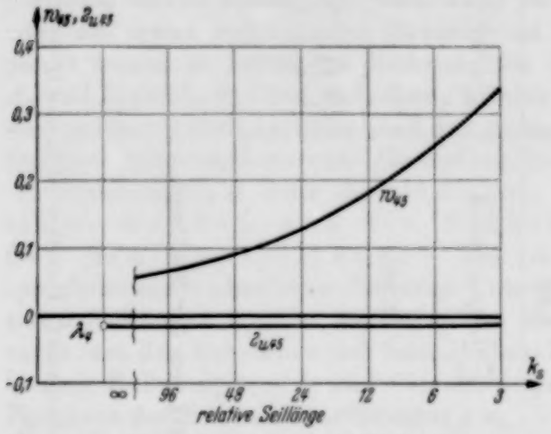

Abb. 8. Entstehen der Wurzeln der Seitenbahnschwingung bei Änderung der Seillänge aus dem Unendlichen heraus und bei Fesselung im Schwerpunkt. $G = 5500$ kg, $c_a = 0{,}436$.

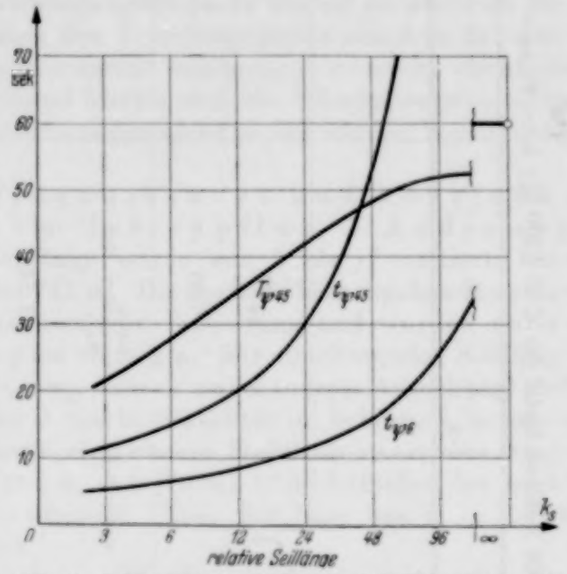

Abb. 10. Schwingungsdauer $T_{\psi_{45}}$ und Anfachzeit $t_{\psi_{45}}$ der Seitenbahnschwingung sowie Abklingzeit der statischen Stabilität t_{ψ_6} bei Änderung der Seillänge. $G = 5500$ kg, $c_a = 0{,}436$.

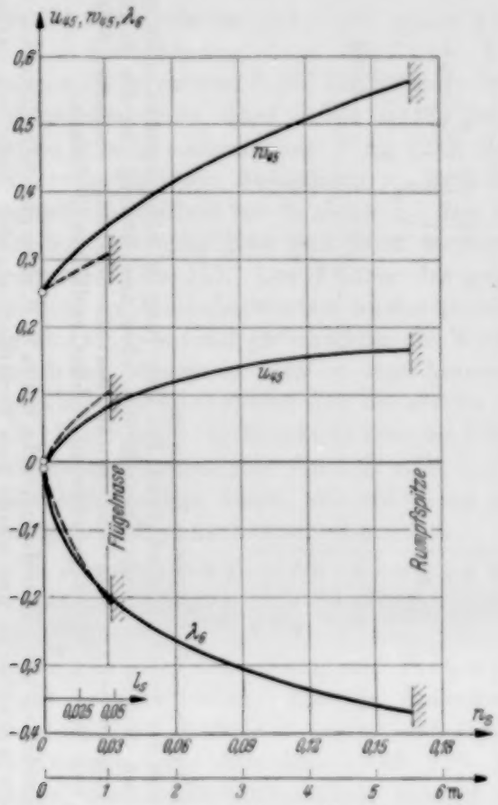

Abb. 9. Wurzeln der Seitenbahnschwingung $u_{45} \pm i\, w_{45}$ und der statischen Stabilität λ_6 bei Änderung der Lage des Fesselungspunktes 1. in horizontaler Richtung vom Schwerpunkt zur Rumpfspitze und 2. in vertikaler Richtung vom Schwerpunkt bis zur Höhe der Flügelnase.

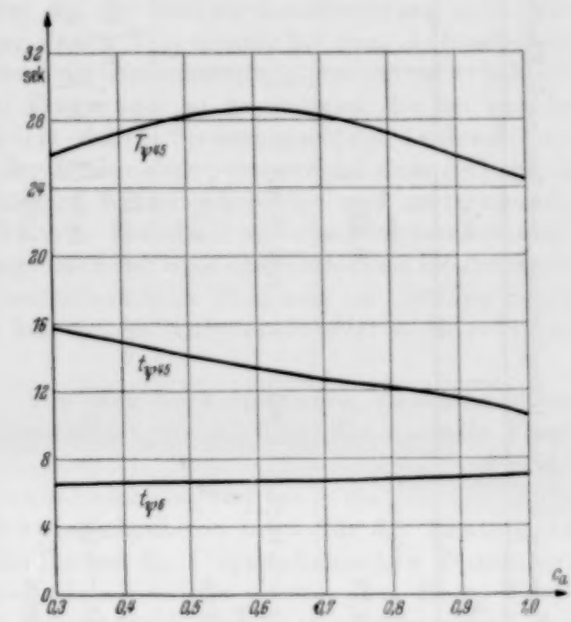

Abb. 11. Schwingungsdauer $T_{\psi 45}$ und Anfachzeit $t_{\psi 45}$ der Seitenbahnschwingung sowie Abklingzeit der statischen Stabilität $t_{\psi 6}$ bei Änderung des Auftriebsbeiwertes. $G = 5500$ kg, $k_s = 6$.

λ_4, die im Schlepp durch die Seilkraft negativ, also stabil wird. Die Koeffizienten A_5 und A_6 und die Wurzeln der Seitenbahnschwingung sind noch nicht vorhanden. Läßt man die Seillänge endlich werden (Abb. 8), so entsteht neu der Koeffizient A_5, und aus der Wurzel λ_4 entwickelt sich ein konjugiert komplexes Wurzelpaar, das die Seitenbahnschwingung charakterisiert. Die Schwingung ist hierbei noch gedämpft. Dabei ist $2\, u_{45} = \lambda_4$, d. h. die Dämpfung der Schwingung ist halb so groß wie die reelle Wurzel bei unendlicher Seillänge, aus der die Schwin-

Tabelle 1. *Koeffizienten der Stabilitätsgleichung, geordnet nach Einflußgrößen mit Zahlenbeispiel für* $G = 5500\ kg$; $k_s = 6$; $c_a = 0{,}436$.

	A_A	ΔA_s	ΔA_F	ΔA_l	ΔA_{lF}
$A_1 =$	$l_x + n_z + c_{q\beta} - c_a \operatorname{tg}\gamma$ 18,70	c_s 0,037			
$A_2 =$	$l_x n_z - n_x l_z + (c_{q\beta} - c_a \operatorname{tg}\gamma)(l_x + n_s) + \mu_s n_\beta$ 49,76	$c_s (l_x + n_z)$ 0,67	$n_s \mu_s \left(1 + \frac{a}{l}\right)$ 1,89	$c_s \frac{\mu_s}{k_s}$ 0,07	
$A_3 =$	$(c_{q\beta} - c_a \operatorname{tg}\gamma)(l_x n_z - n_x l_z) + \mu_s [l_x n_\beta - n_x l_\beta - c_a (l_\beta + n_\beta \operatorname{tg}\gamma)]$ 280,6	$c_s (l_x n_z - n_x l_z) + c_s \mu_s n_\beta \left(1 + \frac{a}{l}\right)$ 1,54	$\mu_s \left(1 + \frac{a}{l}\right)[n_s (l_x + c_{q\beta} + c_w) - l_s n_x]$ 32,7	$c_s \frac{\mu_s}{k_s} (l_x + n_z)$ 1,78	
$A_4 = \mu_s$	$\left\{c_a [n_\beta l_z - l_\beta n_z - \operatorname{tg}\gamma (l_x n_\beta - n_x l_\beta)\right.$ −4,97	$c_s \left(1 + \frac{a}{l}\right)(l_x n_\beta - l_\beta n_x)$ 9,52	$\left(1 + \frac{a}{l}\right)(n_s l_x - n_x l_s)(c_{q\beta} + c_w)$ 15,45	$\frac{c_s}{k_s} (\mu_s n_\beta + l_x n_z - n_x l_z)$ 2,92	$\left.\frac{\mu_s}{k_s} [(c_{q\beta} + c_s) n_s + c_a l_s)]\right\}$ 1,75
$A_5 = \mu_s^2$			$\left\{c_a \left(1 + \frac{a}{l}\right)(n_\beta l_s - l_\beta n_s)\right.$ 21,08	$\frac{c_s}{k_s} (l_x n_\beta - n_x l_\beta)$ 18,09	$\left.\frac{1}{k_s} [(c_{q\beta} + c_s)(l_x n_s - n_x l_s) + c_a (n_z l_s - l_z n_s)]\right\}$ 34,87
$A_6 = \mu_s^3$					$\left\{\frac{c_a}{k_s} \left(1 + \frac{a}{l}\right)(l_s n_\beta - n_s l_\beta)\right\}$ 40,0

A_A = Koeffizienten für ein alleinfliegendes Flugzeug.
ΔA_s = Zusatzglied, von der Seilkraft herrührend, bei Fesselung im Schwerpunkt, aber unabhängig von der Seillänge.
ΔA_F = Zusatzglied, von den Seilmomenten herrührend, aber unabhängig von der Seillänge[1].
ΔA_l = Zusatzglied, von der Seilkraft im Schwerpunkt herrührend infolge endlicher Seillänge.
ΔA_{lF} = Zusatzglied, aus Seilmomenten herrührend infolge endlicher Seillänge.

[1] Bei Bugfesselung befindet sich der Fesselungspunkt bei $c_a = 0{,}56$ in gleicher Höhe wie der Schwerpunkt. Damit wird h_s und $l_s = 0$. Auch bei anderen Anstellwinkeln bleibt l_s klein gegenüber n_s und wurde zur Vereinfachung der Rechnung vernachlässigt.

gung hervorgeht. Die Schwingungsdauer ist bei unendlicher Seillänge unendlich, erreicht dann allerdings schon bei sehr großen Seillängen relativ spürbare Werte z. B. $k_s = 24$, Seillänge $l = 290$ m, Schwingungsdauer 123 sec.

Läßt man dann den Fesselungspunkt aus dem Schwerpunkt heraus in horizontaler Richtung bis zum Rumpfbug wandern, so entsteht neu der Koeffizient A_6 und die Wurzel der statischen Stabilität λ_6, die zunächst schnell und dann langsamer anwächst (Abb. 9). Etwa proportional hierzu nimmt die Anfachung zu. Die Schwingungsfrequenz wächst im gleichen Bereich auf etwas mehr als das Doppelte an. Läßt man den Fesselungspunkt aus dem Schwerpunkt heraus in vertikaler Richtung bis zur Flügeloberseite wandern, so entsteht ebenfalls A_6 und λ_6 (Abb. 9). Die Anfachung wächst proportional hierzu, und die Schwingungsfrequenz wird größer, jedoch entsprechend den geringeren Entfernungen nicht so viel wie bei Wanderung des Fesselungspunktes zum Rumpfbug hin.

b) Einfluß der Seillänge, des Flugzustandes und konstruktiver Größen auf die Stabilität im Schleppflug. 1. Änderung der Schleppseillänge[1]. Die relative Seillänge wurde von 3 bis 12 variiert, entsprechend einer absoluten Seillänge l von 36,7 m bis 147 m. Die darüber hinausgehenden relativen Seillängen $k_s = 24$, 48, 96 haben nur eine theoretische Bedeutung und wurden untersucht, um das Entstehen der Seitenbahnschwingung zu verfolgen. Mit zunehmender Seillänge bleiben Rolldämpfung λ_1 und Gierschwingung $u_{23} + i w_{23}$ nahezu unverändert, Anfachung und Frequenz der Seitenbahnschwingung $u_{45} + i w_{45}$ und statische Stabilität im Schlepp λ_6 nehmen dagegen ab (Abb. 10). Eine Seilverlängerung als Mittel, eine bessere Stabilität zu erzielen, empfiehlt sich jedoch nur bis zu einer Seillänge von etwa $k_s = 6$ (76 m). Aus Gründen des praktischen Flugbetriebes ist ein kurzes Schleppseil erwünscht. Eine Seillänge von $k_s = 5 - 6$ (60—74 m) erscheint daher am günstigsten zu sein.

2. Änderung des Auftriebsbeiwertes. Hierbei wurde mit sechs verschiedenen c_a-Werten von 0,303 bis 1,0 gerechnet, um den ganzen Auftriebsbereich zu erfassen. Die Auftriebsbeiwerte über 0,681 treten im praktischen Flugbetrieb im allgemeinen nur im instationären beschleunigten Flug nach dem Abheben auf. Mit wachsendem Auftriebsbeiwert vergrößert sich die Anfachung u_{45} und die Frequenz w_{45} der Seitenbahnschwingung sowie die statische Stabilität im Schlepp λ_6. Die Schwingungsdauer $T_{\varphi 45}$ nimmt bis zum Auftriebsbeiwert 0,6 geringfügig zu und dann wieder ab, während die Anfachzeit $t_{\varphi 45}$ prozentual erheblich abnimmt (Abb. 11). Der Führer des geschleppten Flugzeuges ist gezwungen, die bei zunehmenden Auftriebsbeiwerten anwachsende Instabilität durch Steuerausschläge laufend auszugleichen, während gleichzeitig die Wirksamkeit der Ruder aber proportional dem sinkenden Staudruck *abnimmt*. Das ist eine besonders bei böigem Wetter schwierige und anstrengende Aufgabe. Daraus erklärt sich die starke Abhängigkeit der Stabilität von der Fluggeschwindigkeit. Die Rechnung bestätigt also die Flugerfahrung, nach der man oberhalb eines bestimmten Auftriebsbeiwertes (für Go 242 z. B. $c_a > 0{,}8$) ein seiteninstabiles Flugzeug im Schlepp nicht mehr beherrschen kann, obwohl es im Alleinflug bei diesem Auftriebsbeiwert noch sehr befriedigende Eigenschaften zeigt.

3. Änderung des Fluggewichts. Von den vorkommenden Ladezuständen wurden als Beispiele das Leerfluggewicht mit Trimmballast von 4200 kg, das normale Fluggewicht 5500 kg und das Vollastfluggewicht 6800 kg gewählt. Mit zunehmendem Fluggewicht vergrößern sich Anfachung und Frequenz der Seitenbahnschwingung sowie die statische Stabilität ganz erheblich. Für die Anfachzeit und Schwingungsdauer sowie für die Abklingzeit der statischen Stabilität ergibt sich infolge des Einflusses der flugmechanischen Zeiteinheit T_F eine geringere Abnahme (Abb. 12). Mit zunehmendem Gewicht werden aber die c_a-Werte größer, die Ruderwirksamkeit nimmt also ab. Ferner wird der Leistungsüberschuß des

[1] Übergang zur Seillänge 0: Beim Übergang zu einem sehr kurzen Schleppseil kann der Seilwinkel σ auch bei sehr kleinen Seitenbahn- und Gierschwingungen sehr groß werden. Dann trifft aber die Näherung für σ (5) nicht mehr zu. Wird schließlich $l = 0$, so ist keine freie Gierschwingung um den Schwerpunkt des geschleppten Flugzeugs mehr möglich. Dieser Fall läßt sich durch die zwei Differentialgleichungen der Rollbewegung und der Bewegung um den Fesselungspunkt am Schleppflugzeug (gekoppelte Gier- und Schwerpunktsbahnbewegung) ausdrücken. Dem Fall $l = 0$ ähnlich ist der Fieseler Deichselschlepp (*H. Solf*, Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung, S. I 391 und *K. Petrikat* und *E. Pieruschka*, Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung, S. I 404) und der Dreiecksschlepp (*W. Söhne*, Die Seitenstabilität eines geschleppten Flugzeuges. Der Dreiecksschlepp, Monographie des M.O.S. Völkenrode, 1946), bei dem durch die beiden in größerem Abstand in der Flügelnase angreifenden Seile auch keine freie Gierschwingung mehr möglich ist.

Schleppflugzeuges geringer, und es wird daher langsamer geflogen als mit geringerem Gewicht. Die Erschwerungen, die sich bei Vergrößerung des Auftriebsbeiwertes ergeben, treten daher noch einmal zusätzlich ein. Die Schwierigkeiten für den Flugzeugführer, die Anfachung auszugleichen, wachsen infolgedessen erheblich mehr an als dies durch die Zahlen der Anfachzeiten und Schwingungsdauer zum Ausdruck kommt.

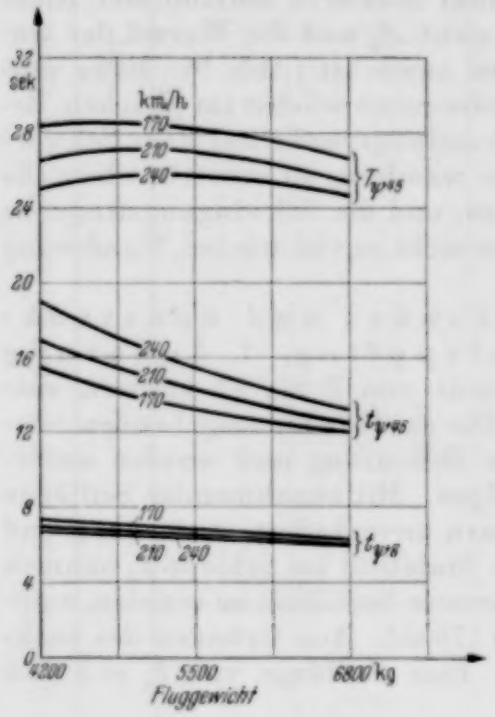

Abb. 12. Schwingungsdauer und Anfachzeit der Seitenbahnschwingung sowie Abklingzeit der statischen Stabilität bei Änderung des Fluggewichts und bei verschiedenen Fluggeschwindigkeiten. $k_s = 6$.

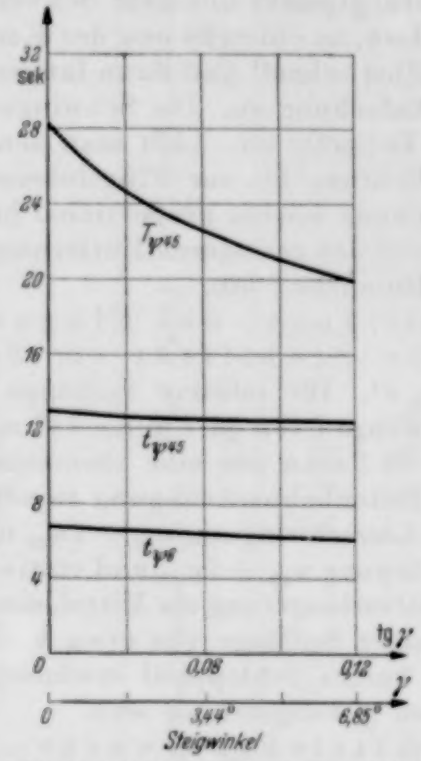

Abb. 13. Schwingungsdauer und Anfachzeit der Seitenbahnschwingung sowie Abklingzeit der statischen Stabilität bei Änderung des Steigwinkels. $G = 5500$ kg, $c_a = 0{,}681$, $k_s = 6$.

4. Änderung des Steigwinkels. Die als Beispiel gewählten Steigwinkel $\gamma = 3{,}44°$ und $6{,}85°$ entsprechen bei $G = 5500$ kg und $c_a = 0{,}681$ den Steiggeschwindigkeiten 2,8 m/s und 5,6 m/s. Mit wachsender Steiggeschwindigkeit verringert sich die Anfachungszeit der Seitenbahnschwingung und der statischen Stabilität im Schleppflug nur geringfügig (Abb. 13). Dagegen wird die Frequenz der Seitenbahnschwingung mit zunehmendem Steigwinkel beträchtlich größer, d. h. die Schwingungsdauer nimmt ab, eine für den Flugzeugführer ebenfalls unbequeme Erscheinung. Da der Steigflug natürlicherweise immer mit geringerer Fluggeschwindigkeit verbunden ist, addieren sich auch hier die Erscheinungen der größer werdenden Anfachung der Seitenbahnschwingung im Langsamflug und der kleiner werdenden Schwingungsdauer im Steigflug. Die Rechnung bestätigt also auch in diesem Fall die Flugerfahrungen, die gerade für den Steigflug bei lang-

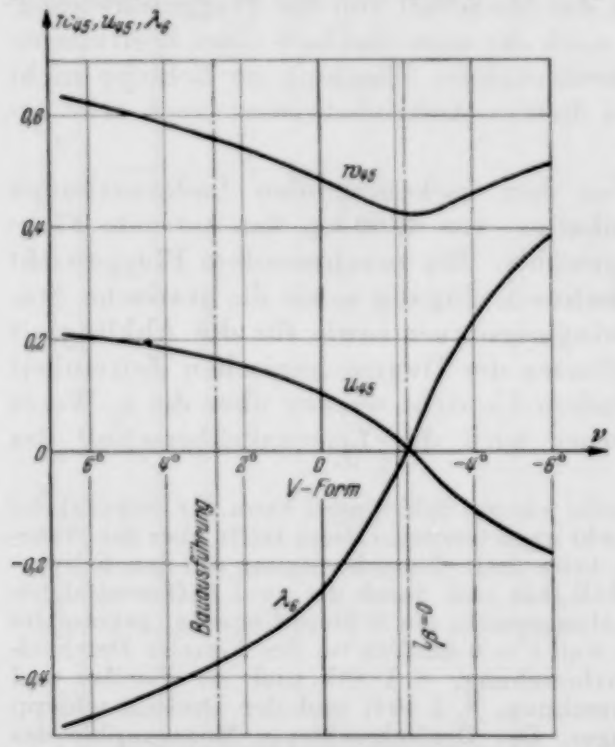

Abb. 14. Wurzeln der Seitenbahnschwingung $u_{\varphi s} \pm i\, w_{\varphi s}$ und der statischen Stabilität λ_s bei Änderung der V-Form. $G = 5500$ kg, $c_a = 0{,}436$, $k_s = 6$.

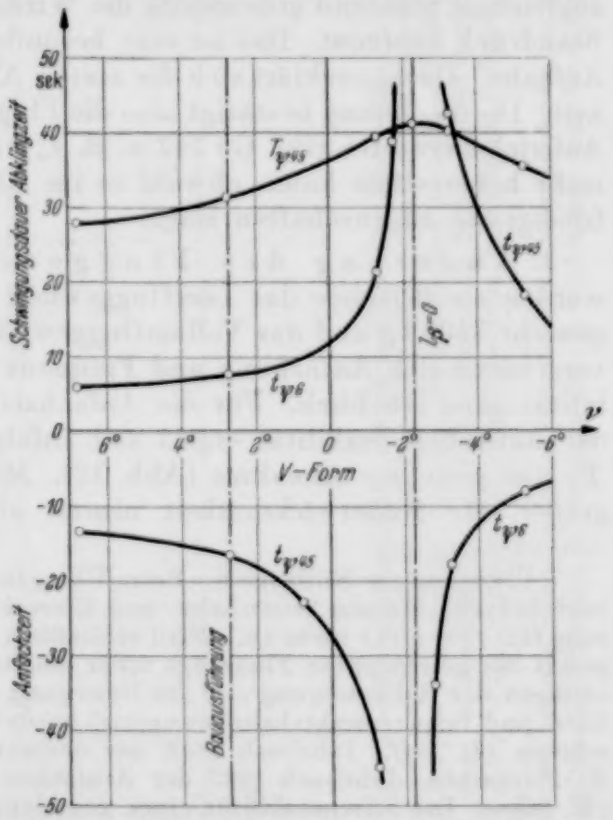

Abb. 15. Schwingungsdauer und Anfachzeit der Seitenbahnschwingung sowie Abklingzeit der statischen Stabilität bei Änderung der V-Form. $G = 5500$ kg, $c_a = 0{,}436$, $k_s = 6$.

samer Geschwindigkeit die größte Instabilität und damit die größten Schwierigkeiten, das Flugzeug zu beherrschen, aussagen.

5. Änderung des Schieberollmoment durch Änderung der V-Form. Die V-Form wurde von $+6{,}7°$ bis $-5{,}3°$ variiert, wodurch sich das Schieberollmoment von $c_{l\beta} = -0{,}26$ bis $+0{,}09$ änderte. Mit abnehmender V-Form nimmt die Anfachung u_{45} der Seitenbahnschwingung immer mehr ab, und nach Durchschreiten des Nullpunktes wird daraus eine schnell zunehmende Dämpfung (Abb. 14, 15). Die Frequenz der Schwingung zeigt bei Anfachung Null ein Minimum und steigt dann wieder an. Die statische Stabilität nimmt etwa proportional mit der Anfachung der Seitenbahnschwingung ab und geht etwa bei gleicher V-Form ins instabile Gebiet über. Aus dieser bemerkenswerten Abhängigkeit der Seitenstabilität im Schleppflug vom Schieberollmoment ist folgender Schluß zu ziehen: Die günstigsten Flugeigenschaften ergeben sich bei Fesselung im Rumpfbug bei Schieberollmoment $c_{l\beta} = 0$, bei dem die Anfachung der Seitenbahnschwingung sehr klein ist, die Schwingungsdauer ein Maximum zeigt und gleichzeitig die statische Seitenstabilität im Schlepp Null geworden ist. Für einen Schulterdecker verschwindet das Schieberollmoment bei einer geringen negativen V-Form (Go 242: $\nu = -2{,}23°$). Im Alleinflug zeigt das Flugzeug dann allerdings eine gewisse Spiralsturzneigung, die aber keine große Rolle spielt, da der Alleinflug immer nur wenige Minuten dauert. Das Primäre ist für ein geschlepptes Flugzeug immer der Schleppflug.

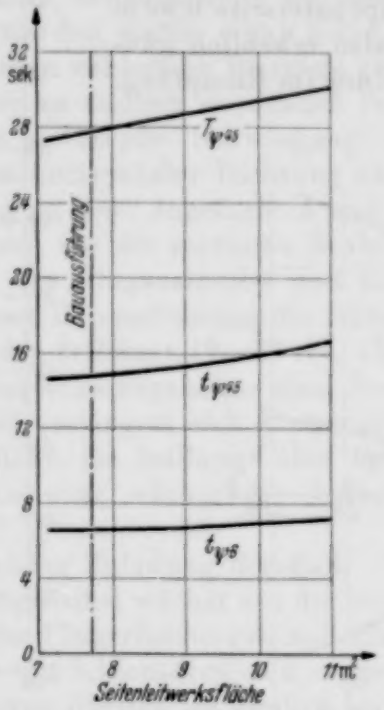

Abb. 16. Schwingungsdauer und Anfachzeit der Seitenbahnschwingung sowie Abklingzeit der statischen Stabilität bei Änderung der Seitenleitwerksfläche. $G = 5500$ kg, $c_a = 0{,}436$.

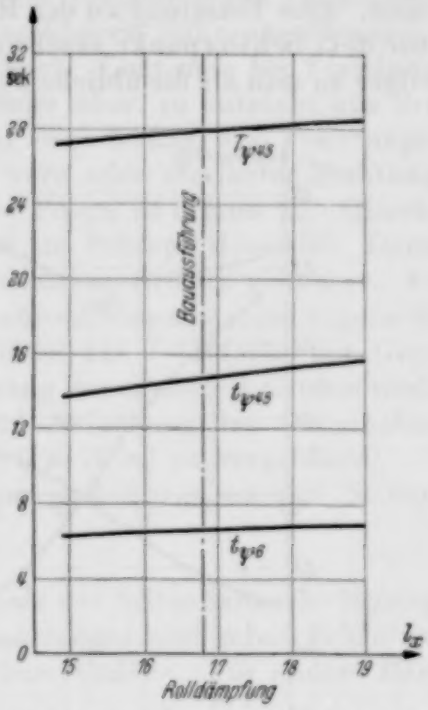

Abb. 17. Schwingungsdauer und Anfachzeit der Seitenbahnschwingnug sowie Abklingzeit der statischen Stabilität bei Änderung der Rolldämpfung. $G = 5500$ kg, $c_a = 0{,}436$.

6. Änderung der Seitenleitwerksfläche. Die Seitenleitwerksfläche wurde in der auf Abb. 6 angegebenen Weise von $2 \times 3{,}85$ bis $2 \times 5{,}39$ m² vergrößert, wodurch die Schiebeseitenkraft, das Schiebegiermoment und die Wendedämpfung erheblich zunahmen. Eine Vergrößerung der Seitenleitwerksfläche ist ein übliches Mittel, die Seitenstabilität eines alleinfliegendes Flugzeugs zu verbessern. Beim geschleppten Flugzeug ergibt sich ebenfalls eine starke Vergrößerung der Dämpfung, allerdings auch eine geringe Zunahme der Frequenz der Gierschwingung. Die Anfachung und Frequenz der Seitenbahnschwingung und die statische Stabilität im Schleppflug nehmen dagegen nur geringfügig ab (Abb. 16), die Anfachungszeit und Schwingungsdauer also geringfügig zu. Aus diesem Grunde wäre eine Vergrößerung der Seitenleitwerksfläche kaum ein lohnendes Mittel zur Verbesserung der Seitenstabilität im Schlepp. Da der Flugzeugführer die sich anfachende Seitenbahnschwingung jedoch durch sinngemäße Querruder- und Seitenruderbetätigung ausgleichen muß, gelingt ihm dies um so leichter, je wirksamer d. h. unter anderem auch je größer diese Leitwerke sind. Somit ist eine Seitenleitwerksvergrößerung also durchaus geeignet, die Seitenstabilität des geschleppten Flugzeugs zu verbessern.

7. Änderung der Rolldämpfung. Bei Variation der Momentenzahl der Rolldämpfung von $l_x = 15{,}12 - 18{,}48$ wie sie beispielsweise durch eine Veränderung des Seitenverhältnisses des Flügels von $\Lambda = 8$ bis 13,1 hervorgerufen werden kann, wächst die Rolldämpfungswurzel λ_1 proportional der Momentenzahl der Rolldämpfung l_x. Die Anfachung und die Frequenz der Seitenbahnschwingung nehmen geringfügig ab, die Anfachungszeit und Schwingungsdauer also geringfügig zu (Abb. 17). Nach der Rechnung sind also die Schleppeigenschaften eines Flugzeuges mit großer Rolldämpfung d. h. großem Seitenverhältnis, etwas besser als die mit kleiner Rolldämpfung bzw. kleinem Seitenverhältnis. Dem steht allerdings

die größere Trägheit gegenüber, mit der ein Flugzeug mit größerem Seitenverhältnis auf Querruderausschläge reagiert.

8. Fesselung an der Rumpfunterseite und Änderung der Lage des Fesselungspunktes in horizontaler Richtung. Indifferenz der Seitenbahnschwingung, verbunden mit statischer Indifferenz, läßt sich ohne konstruktive Änderungen am Flugzeug erzielen, wenn man den Fesselungspunkt an die Rumpfunterseite vor den Schwerpunkt legt. Bei Fesselung senkrecht unter dem Schwerpunkt an der Rumpfunterseite ergibt sich statische Instabilität und eine abklingende Seitenbahnschwingung. Läßt man dann den Fesselungspunkt nach vorn wandern, so geht die Wurzel der statischen Stabilität λ_6 bei einer Lage von 0,90 m vor dem Schwerpunkt in den stabilen Bereich über, gleichzeitig wird an derselben Stelle aus der abklingenden eine angefachte Seitenbahnschwingung (Abb. 18). Die Schwingungsfreqenz zeigt dabei ein Minimum. Durch die Fesselung unter dem Schwerpunkt wird ein schwanzlastiges Moment hervorgerufen, das durch Höhenrudertrimmung ausgeglichen werden muß. Eine Fesselung an der Rumpfunterseite 0,90 m vor dem Schwerpunkt erscheint also erheblich günstiger zu sein als die übliche Fesselung im Rumpfbug.

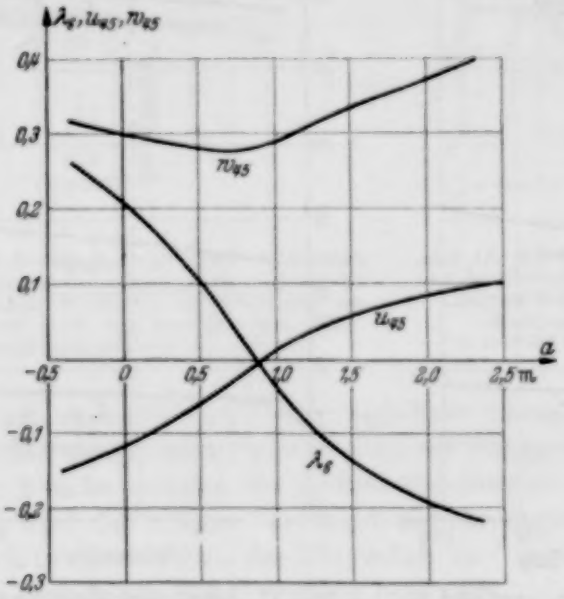

Abb. 18. Wurzeln der Seitenbahnschwingung $u_{45} \pm i\nu_{45}$ und der statischen Stabilität λ_6 bei Wanderung des Fesselungspunktes an der Rumpfunterseite nach vorn. a horizontale Komponente des Abstandes Fesselungspunkt-Schwerpunkt.

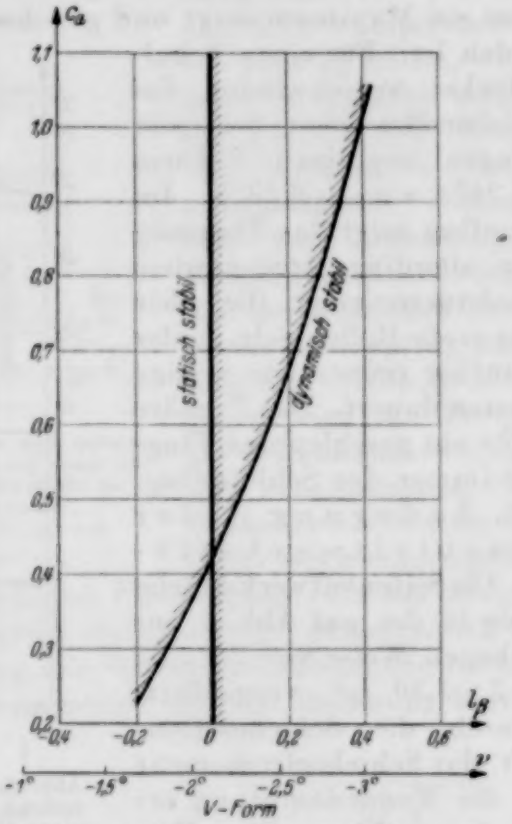

Abb. 19. Stabilitätsgrenzen bei Änderung des Auftriebsbeiwertes in Abhängigkeit von der V-Form.

c) Stabilitätsgrenzen für verschiedene Seillängen, Gewichte und Auftriebsbeiwerte über dem Schieberollmoment. Die Variation des Schieberollmoments bei $G = 5500$ kg, $c_a = 0{,}436$, $k_s = 6$ ergab bei Fesselung im Rumpfbug eine besondere Abhängigkeit der statischen Stabilität und der Anfachung der Seitenbahnschwingung vom Schieberollmoment. Es erschien daher wünschenswert, auch für andere Gewichte, Seillängen und Auftriebsbeiwerte dieses Ergebnis zu überprüfen. Mit Hilfe der *Routh*schen Stabilitätskriterien wurden die Stabilitätsgrenzen für dynamische und statische Stabilität für diese Variablen über dem Schieberollmoment bestimmt. Danach liegt die Grenze der statischen Stabilität bei $l_\beta = 0$. Die Grenze der dynamischen Stabilität wandert bei allen Gewichten mit kürzer werdendem Seil von einem sehr kleinen negativen Wert zu einem etwas größeren positiven Wert von l_β. Der Unterschied ist aber so gering (ca. $^1/_4°$ V-Stellung), daß man praktisch sagen kann: Bei Variation der V-Form fallen für den Reiseflug $c_a = 0{,}436$ die Grenzen der statischen und dynamischen Stabilität bei $l_\beta = 0$ so zusammen, daß man entweder nur statische Stabilität und dynamische Instabilität oder umgekehrt bzw. statische und dynamische Indifferenz erzielen kann. Dagegen zeigt eine gleichzeitige Variation des Auftriebsbeiwertes und der V-Form (Abb. 19), daß sich unterhalb eines Auftriebsbeiwertes von $c_a = 0{,}42$ ein allmählich breiter werdender Bereich statischer und dynamischer Stabilität ergibt, während oberhalb $c_a = 0{,}42$ sich ein Bereich gleichzeitiger statischer und dynamischer Instabilität ergibt.

7. Zusammenfassung. An Hand der bekannten Seitenstabilitätstheorie[1] (für alleinfliegende Flugzeuge) wurde nach der Methode der kleinen Schwingungen die Seitenstabilität eines mit Hilfe eines Seiles geschleppten Flugzeuges theoretisch untersucht und die Frequenzgleichung hierfür abgeleitet. Während die Frequenzgleichung der Seitenstabilität des alleinfliegenden Flugzeuges eine Gleichung vierten Grades ist, ergibt sich beim geschleppten Flugzeug eine Gleichung sechsten Grades. Hierbei bleibt die Rolldämpfungswurzel λ_1 und das Gierschwingungswurzelpaar $\lambda_{23} = u_{23} \pm i w_{23}$ des alleinfliegendes Flugzeuges fast unverändert bestehen, dagegen verschwindet die Spiralwurzel λ_4. An ihre Stelle tritt ein neues konjugiert komplexes Wurzelpaar $\lambda_{45} = u_{45} \pm i w_{45}$, das die im Schleppflug auftretende Seitenbahnschwingung charakterisiert, sowie eine reelle Wurzel λ_6, die die statische Seitenstabilität im Schlepp darstellt. Die Seitenbahnschwingung ist im allgemeinen angefacht. Die Grenze der dynamischen Stabilität kann durch die *Hurwitz-Routh*schen Stabilitätsbedingungen bestimmt werden. Es wurde untersucht, welche Diskriminante maßgebend für die Stabilitätsgrenze der Seitenbahnschwingung ist. Der entsprechende Ausdruck konnte erheblich vereinfacht werden. Die Untersuchung von Spezialfällen, in denen jeweils ein oder zwei Freiheitsgrade (Roll- und Gierschwingung) vernachlässigt worden waren, ergab keine brauchbaren Näherungslösungen.

Für das Flugzeug Go 242 wurden zahlreiche Beispiele gerechnet. Geht man bei Fesselung im Schwerpunkt von unendlicher zu endlich werdender Seillänge über, so entsteht aus der reellen Wurzel λ_4 eine zunächst gedämpfte Schwingung. Bei Wanderung des Fesselungspunktes aus dem Schwerpunkt in horizontaler Richtung nach vorn oder vertikaler Richtung nach oben wird diese Schwingung zu einer angefachten und ihre Frequenz nimmt zu. Gleichzeitig erscheint eine reelle Wurzel, die die statische Stabilität im Schlepp darstellt. Dann wurden verschiedene Parameter des Flugzustandes und konstruktive Größen geändert. Es ergab sich, daß bei der vorhandenen Bauausführung die Seitenbahnschwingung stark angefacht ist. Ihre Dauer beträgt je nach der Seillänge 19—32 sec, also etwa das 7—10fache der Gierschwingungen. Die bemerkenswertesten Ergebnisse einer Änderung der einzelnen Größen sind:

1. Mit länger werdendem Seil verringert sich Frequenz und Anfachung der Seitenbahnschwingung. Jedoch lohnt es nicht, die Seillänge über $k_s = 6$ ($l = 76$ m) zu vergrößern.

2. Mit steigendem Auftriebsbeiwert wächst die Anfachung und Frequenz der Seitenbahnschwingung.

3. Das Gleiche ist mit steigender Zuladung der Fall.

4. Mit größer werdendem Steigwinkel wächst nur die Frequenz der Seitenbahnschwingung.

Diese Ergebnisse bestätigen die Flugerfahrungen und Flugmessungen und geben Erklärungen für manche Schwierigkeiten im Schleppflug und aufgetretene Unfälle. Für andere Baumuster mit hoher Flächenbelastung dürften sie ähnlich sein.

5. Bei Änderung der V-Form geht für verschwindendes Schieberollmoment ($\nu = -2{,}23°$) die Anfachung der Seitenbahnschwingung auf Null zurück, die Schwingungsdauer erreicht hierbei ein Maximum. Gleichzeitig wird die statische Stabilität im Schleppflug gleich Null. Mit Hilfe der *Routh*schen Diskriminante wurden auch für andere Gewichte, Seillängen und Auftriebsbeiwerte die Stabilitätsgrenzen über dem Schieberollmoment bestimmt. Dabei ergab sich unterhalb $c_a = 0{,}42$ ein Bereich gleichzeitiger statischer und dynamischer Stabilität. Bei diesem Bauzustand (nämlich $l_\beta = 0$ bis 0,2, $\nu = -2°$ bis 2,3°) sind demnach die Schleppbedingungen am günstigsten. Eine absolute Stabilität im Schlepp in dem Sinne, daß durch die Seilkräfte und Momente das Flugzeug so gelenkt wird, daß die Arbeit des Flugzeugführers gänzlich überflüssig wird, ist nicht zu erzielen. Bei $l_\beta > 0$ ist zwar die Seitenbahnschwingung gedämpft, jedoch statische Instabilität vorhanden, während bei $l_\beta < -0{,}2$ statische Stabilität vorhanden, aber die Seitenbahnschwingung angefacht ist.

6. Mit größer werdender Seitenleitwerksfläche nimmt Frequenz und Anfachung der Seitenbahnschwingung nur wenig ab, jedoch kann eine solche Vergrößerung zur Verbesserung der Ruderwirksamkeit unter Umständen empfehlenswert sein.

7. Eine Vergrößerung der Momentenzahl der Rolldämpfung l_x ergibt eine kleine Verringerung der Anfachung und Frequenz der Seitenbahnschwingung.

8. Bei Fesselung an der Rumpfunterseite 0,90 m vor dem Schwerpunkt läßt sich ohne konstruktive Änderung am Flugzeug ebenfalls statische und dynamische Indifferenz erzielen. Diese Lage erscheint daher für den Fesselungspunkt günstiger zu sein als die übliche Fesselung im Rumpfbug.

(Eingegangen am 13. November 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *W. Söhne*, Braunschweig, Bortfelder Stieg 5.

[1] Siehe Fußnote [1] von S. 247 und Fußnote [2] von S. 256.

Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik.

Von A. Kromm.

1. Einleitung, Problemstellung. Wenn man von einer Theorie der Stäbe, Platten oder Schalen spricht, so versteht man darunter gewisse angenäherte Lösungen der exakten Grundgleichungen der Elastizitätstheorie, die man aus diesen mit Hilfe besonderer Annahmen über die Deformation des Körpers oder die Verteilung der angreifenden Kräfte oder über beides gewinnt — Annahmen, die der jeweiligen Gestalt des untersuchten Körpers und seiner Belastung anzupassen sind. In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit der Theorie der ebenen Platten, wobei wir die nichtlinearisierte Theorie der Platte mit „Gewölbespannungen" außer Betracht lassen wollen.

Die älteste Plattentheorie, die nach ihrem Vollender als die *Kirchhoff*sche bezeichnet wird [1], geht bekanntlich außer der (für eine linearisierte Theorie selbstverständlichen) Annahme kleiner Durchbiegungen noch von besonderen Voraussetzungen aus, die man am einfachsten so formulieren kann, daß die Platte sich wie ein querisotroper Körper (quer zur Richtung z der Plattennormale) verhält, für den im Elastizitätsgesetz solcher Körper

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) - \frac{\nu_z}{E_z}\sigma_z\,, & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\,,\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) - \frac{\nu_z}{E_z}\sigma_z\,, & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_z}\tau_{xz}\,,\\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z}[\sigma_z - \nu_z(\sigma_x+\sigma_y)]\,, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_z}\tau_{yz} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

die Konstanten E_z und G_z unendlich groß sind.

Wie man aus einigen exakten Lösungen für eine als einen isotropen Körper behandelte dicke Platte weiß [2], gehen diese Lösungen im Grenzfall der unendlich dünnen Platte in solche nach der klassischen Theorie über. Die dünnen isotropen und die querisotropen Platten weisen demnach, wie es auch nicht anders zu erwarten ist, in der Grenze ein gleiches Verhalten auf. Für isotrope Platten endlicher Dicke ist aber die Annahme, daß sie sich wie querisotrope Platten mit $E_z = G_z = \infty$ verhalten, eine Arbeitshypothese, die allerdings für die meisten technischen Anwendungen ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Sie gilt aber nicht mehr für dicke Platten und insbesondere nicht für die Umgebung konzentrierter Einzellasten.

Der Spannungszustand in der Umgebung solcher Einzellasten läßt sich in befriedigender Weise nur durch Berücksichtigung sämtlicher elastischer Eigenschaften der Platte, d. h. auch ihrer Querzusammendrückung und ihrer Querschubverzerrungen ermitteln. Den geeigneten Weg hierfür hat *Nadai* [3] am Beispiel einer dicken Kreisplatte mit Einzellast in der Mitte dargestellt, den *Woinowsky-Krieger* [4] für den Sonderfall einer starren Randeinspannung bis zu numerischen Ergebnissen weiterverfolgt hat.

Diese für einen Sonderfall gewonnenen Ergebnisse haben eine sehr allgemeine Gültigkeit, da die Differenzen zwischen den Spannungen aus der exakten Rechnung und der aus der *Kirchhoff*schen Theorie, die man als „Störspannungen" bezeichnet, ziemlich rasch abklingen, so daß sie von den Randbedingungen weitgehend unabhängig sind. Somit kann man das Problem der Spannungsverteilung in der Umgebung von Einzellasten im Wesentlichen als gelöst betrachten.

Nun ist die *Kirchhoff*sche Theorie infolge der ihr zugrunde liegenden Arbeitshypothese $E_z = G_z = \infty$ noch in einer anderen Hinsicht für Platten endlicher Dicke unzulänglich, und zwar hinsichtlich der Randbedingungen. Da die verallgemeinerte Plattentheorie, die in der vorliegenden Arbeit entwickelt wird, zur Behebung gerade dieser Unzulänglichkeit beizutragen beabsichtigt, so wollen wir hier die Frage der Randbedingungen eingehend analysieren. Wir betrachten ein Stück der zylindrischen Plattenbegrenzung nach Abb. 1. In jedem Punkt dieser Begrenzung sind drei Randbedingungen vorzuschreiben, entweder für die Komponenten des

[1] *G. Kirchhoff*, Crelles Journ. Math. (1850), S. 51.

[2] Siehe z. B. *Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. (1933), S. 203 (erste Mitteilung) und S. 305 (zweite Mitteilung).

[3] *A. Nadai*, Die elastischen Platten. S. 308. Berlin 1925.

[4] a. a. O. S. 309.

Verschiebungsvektors u_s, u_n, w oder für die des Spannungsvektors τ_{ns}, σ_n, τ_{nz}. Für eine Linie $s =$ konst. die sich über die ganze Plattendicke erstreckt, müßte man streng genommen dreimal unendlich viele Randbedingungen vorschreiben (Abb. 1a). Im Falle nicht sehr dicker Platten ist es allerdings zweckmäßig und für den inneren Spannungszustand der Platte mit ausreichender Genauigkeit auch möglich, diese dreifach unendliche Zahl der Randbedingungen auf eine endliche zu reduzieren. Durch eine geeignete Mittelwertsbildung über die Plattendicke kann man den Verschiebungszustand der Punkte längs der Linie $s =$ konst. durch drei mittlere Verschiebungen u_{s0}, u_{n0}, w_0 und zwei mittlere Drehungen ω_n, ω_s (Abb. 1b), den Spannungszustand längs dieser Linie durch die üblichen Schnittkräfte und Schnittmomente (Abb. 1c)

$$N_{ns} = \int_{-h}^{+h} \tau_{ns}\, dz\,, \qquad N_n = \int_{-h}^{+h} \sigma_n\, dz\,, \qquad Q_n = \int_{-h}^{+h} \tau_{nz}\, dz\,, \qquad M_n = \int_{-h}^{+h} \sigma_n\, z\, dz\,, \qquad M_{ns} = \int_{-h}^{+h} \tau_{ns}\, z\, dz$$

näherungsweise darstellen. Schließen wir den Fall aus, daß in der Nähe des Randes eine konzentrierte Last angreift, die neben dem Biegezustand über die Querkontraktion auch einen „Scheibenzustand" erzeugen würde, so können wir die für die Scheibe zuständigen Verschiebungs- und Kraftkomponenten u_{n0}, u_{s0}, N_{ns} und N_n außer Betracht lassen, und für die Platte bleiben dann nur die drei „Verschiebungsgrößen" w_0, ω_n, ω_s und drei „Schnittkräfte" Q_n, M_n und M_{ns} übrig. Im Falle einer isotropen Platte endlicher Dicke sind also drei Randbedingungen für diese Mittelwerte vorzuschreiben. Die *Kirchhoff*sche Theorie liefert aber nur zwei, und der Grund hierfür ist mechanisch und kinematisch leicht einzusehen. Die Annahme der *Kirchhoff*schen Theorie, daß $E_z = \infty$ ist, schränkt die Zahl der drei gemittelten Freiheitsgrade der Platte nicht ein, wohl aber die Annahme $G_z = \infty$, die mit der Aussage gleichbedeutend ist, daß die Plattennormalen in z-Richtung gerade bleiben und ihren Winkel gegen die Mittellinie s der Berandung nicht ändern. Denn schreibt man längs der Randlinie s die Verschiebungen w_0, also auch $\partial w_0/\partial s$ vor, so ist damit bei $G_z = \infty$ auch die Drehung ω_n festgelegt, so daß nur zwei Freiheitsgrade übrig bleiben, die Verschiebung w_0 und der Biegewinkel ω_s. Entsprechendes gilt auch für die Schnittkräfte: Da die Randdrehmomente M_{ns} bei $G_z = \infty$ eine Schubverzerrung nicht hervorrufen können, so wirken sie sich wie die Querkräfte Q_n nur auf die Durchbiegung der Platte aus, und für den Spannungszustand ist es gleichgültig, ob die Drehmomente M_{ns} durch waagerechte Kräftepaare (aus den Schubspannungen τ_{ns}) oder durch senkrechte Kräftepaare aus den sogenannten Ersatzquerkräften M_{ns}/ds (Abb. 1c) gebildet werden. Aus diesen Ersatzscherkräften ergibt sich die resultierende zusätzliche Ersatzschnittquerkraft $\partial M_{ns}/\partial s$, und der Spannungszustand der Platte wird vollständig festgelegt nur durch zwei Angaben über die Randbelastung, und zwar über die Belastung durch die Querkräfte $Q_n + \partial M_{ns}/\partial s$ und die Biegemomente M_n. Zu demselben Schluß kommt man auch für isotrope, aber unendlich dünne Platten; denn bei diesen schrumpft die Linie $s =$ konst. in einen Punkt zusammen, und die Angabe über die Drehung ω_n verliert ihren Sinn, ebenso wie die Angabe darüber, ob die Drehmomente durch waagerecht oder senkrecht wirkende Kräftepaare gebildet werden. Auch aus der Betrachtung der Randbedingungen erkennt man also, daß die *Kirchhoff*sche Theorie nur für unendlich dünne Platten exakt gilt. Für Platten endlicher Dicke ist sie bezüglich der Randbedingungen unzulänglich, und verantwortlich für diese Unzulänglichkeit ist die Annahme $G_z = \infty$.

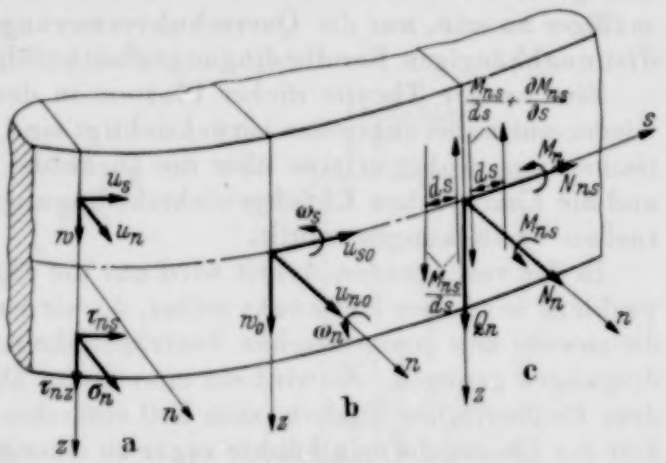

Abb. 1. Zylindrische Plattenbegrenzung.

Das Problem der Randbedingungen ließe sich grundsätzlich ebenso wie das Problem des Spannungszustandes in der Umgebung von Einzellasten mit Hilfe exakter Ansätze lösen. Leider ist aber gerade dieses Problem der analytischen Behandlung nach dem exakten Verfahren am wenigsten zugänglich. Um mit einem erträglichen Rechenaufwand auszukommen, muß man also eine Näherungstheorie aufstellen, für die es möglich und notwendig ist, alle drei Randbedingungen zu befriedigen. Als erster hat eine solche Theorie *E. Reißner*[1] entwickelt, deren

[1] *E. Reißner*, J. Math. Physics 23 (1944), S. 184; *E. Reißner*, J. Appl. Mech. 12 (1945), S. A 68; *E. Reißner*, Quart. Appl. Math. 5 (1947), S. 55.

Grundgedanken vor kurzem in einer Arbeit von *Schäfer*[1] wiedergegeben wurden. *Reißner* geht unter Wahrung der *Cauchy*schen Gleichgewichtsbedingungen von der einfachen, nur für $G_z = E_z = \infty$ gültigen Annahme aus, daß die Spannungen σ_x, σ_y, τ_{xy} linear und die Querschubspannungen τ_{xz}, τ_{yz} parabolisch über die Plattendicke verteilt sind. Mit $E_z = E$ und $G_z = G$ erfüllen die diesen Spannungen entsprechenden Verzerrungen die Verträglichkeitsbedingungen natürlich nicht, man kann sie aber mit Hilfe des *Castiglianos*chen Prinzips im Mittel über die Plattendicke erfüllen. Aus den Minimalbedingungen für die Formänderungsarbeit folgt ein erweitertes Differentialgleichungssystem, welches alle drei Randbedingungen zu erfüllen gestattet.

Reißner berücksichtigt in seiner Theorie nicht nur die Querschubverzerrungen ($G_z = G$), sondern in gewissem Grade auch die Querzusammendrückung ($E_z = E$). Da er aber gleichzeitig für die Spannungen σ_x, σ_y einen linearen Verlauf annimmt, so wird aus dem gesamten Einfluß der Querzusammendrückung in einer Art *Fourier*analyse nur der zur Plattenmittelebene antimetrische Anteil herausgeschält, der ziemlich unwesentlich ist. Setzt man in der *Reißner*schen Rechnung $E_z = \infty$, so erhält man in seinen Gleichungen nur geringfügige, mit der Querkontraktionszahl ν als Faktor behaftete Korrekturen. Es scheint deswegen zweckmäßiger zu sein, nur die Querschubverzerrungen zu berücksichtigen, was zur Gewinnung von drei unabhängigen Randbedingungen notwendig und hinreichend ist.

Eine andere Theorie dicker Platten, in der zwar allein die Querschubverzerrungen, aber wieder nur näherungsweise berücksichtigt sind, hat *Hencky*[2] aufgestellt; er geht vom Kinematischen aus, wobei er eine über die Dicke der Platte konstante Querschubverzerrung zuläßt und die *Cauchy*schen Gleichgewichtsbedingungen nur im Mittel mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen erfüllt.

In der vorliegenden Arbeit wird nur die Querschubverzerrung berücksichtigt. Dieses Teilproblem wird aber hier exakt gelöst, da wir zu Formen der Querschubverzerrungen gelangen, die sowohl den geometrischen Verträglichkeits- als auch den *Cauchy*schen Gleichgewichtsbedingungen genügen. Es wird ein erweitertes Differentialgleichungssystem hergeleitet, welches dem *Reißner*ischen ähnlich, zum Teil einfacher und allgemeiner ist. Die größere Mannigfaltigkeit der Lösungsformen könnte sogar zu einer sich nicht nur auf die Mittelwerte erstreckenden Erfüllung der Randbedingungen herangezogen werden.

2. Bezeichnungen, Voraussetzungen der verallgemeinerten Theorie. Es sei eine ebene Platte von der Dicke $2h$ gegeben, die auf der Oberfläche $z = -h$ durch Flächenkräfte $p(x, y)$ belastet ist. Für die Komponenten des Verschiebungsvektors und des Spannungstensors führen wir die üblichen Bezeichnungen ein, die in Abb. 2 eingetragen sind.

Einen Teil der Voraussetzungen der hier zu entwickelnden Theorie, die sich auf die elastischen Eigenschaften der Platte beziehen, haben wir schon in der Einleitung eingehend begründet. Wir bleiben also hier bei der *Kirchhoff*schen Vorstellung der Starrheit der Platte in z-Richtung ($E_z = \infty$), die für verteilte Oberflächenbelastungen ausreichend genau ist, und berücksichtigen nur die Querschubverzerrungen, indem wir $G_z = G = E/2(1+\nu)$ einführen. Auf diese Weise erhalten wir im Hinblick auf (1) für die Verzerrungen und Spannungen folgendes Elastizitätsgesetz:

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}, \qquad \tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz}, \qquad \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}, \tag{2}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y), \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x). \tag{3}$$

Die Normalspannung σ_z kann man wegen $E_z = \infty$ durch die Verzerrungen nicht ausdrücken, sie muß aus Gleichgewichtsbedingungen gefunden werden. Aus der Annahme $E_z = \infty$, $\varepsilon_z = 0$ folgt noch, daß die Verschiebungskomponente w von z unabhängig ist:

$$w = w(x, y). \tag{4}$$

Die eben ausgesprochene Voraussetzung über das elastische Verhalten der Platte reicht noch nicht aus, um unsere Plattentheorie aufzustellen. Darüber hinaus werden wir solche Lösungen suchen, die von der Annahme einer von x und y unabhängigen Verteilung der Span-

[1] *M. Schäfer*, Z. angew. Math. Mech. 32 (1952), S. 161.
[2] *H. Hencky*, Ing.-Archiv 16 (1947), S. 72.

nungen σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} über die Plattendicke ausgehen, für die also Produktansätze von der Form

$$\sigma_z = p(x, y) f_1(z), \tag{5}$$

$$\tau_{xz} = Q_x f_2(z), \qquad \tau_{yz} = Q_y f_2(z) \tag{6}$$

gelten. Die Überlagerung der hieraus folgenden Lösungen kann natürlich einen veränderlichen Verlauf der Spannungen σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} ergeben, da verschiedenen Lösungen auch verschiedene „Verteilungsfunktionen" $f_1(z)$ und $f_2(z)$ entsprechen können. Über die Gestalt dieser Funktionen sagen wir noch nichts aus; $f_2(z)$ soll im allgemeinen weder eine Parabel wie bei *Reißner*, noch eine Konstante wie bei *Hencky* sein. Wir werden diese Funktionen so bestimmen, daß sie sowohl den Verträglichkeits- als auch den *Cauchy*schen Gleichgewichtsbedingungen genügen.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen an der Plattenoberfläche, die nur bei $z = -h$ durch Druckkräfte $p(x, y)$ belastet ist, erhält man sofort folgende Grenzwerte für $f_1(z)$:

$$\left.\begin{aligned} f_1(z) &= -1 \quad \text{bei} \quad z = -h, \\ f_1(z) &= \;\;0 \quad \text{bei} \quad z = +h \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und wegen $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$$f_2(z) = \;\;0 \quad \text{bei} \quad z = \pm h. \tag{8}$$

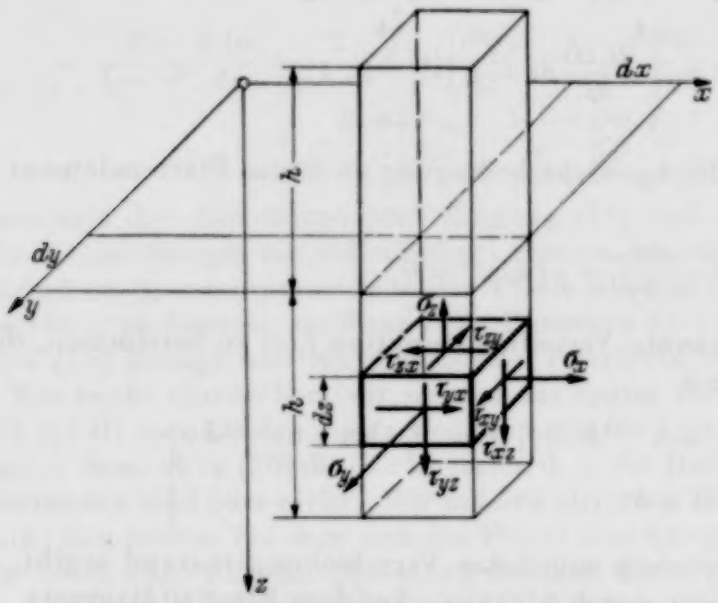

Abb. 2. Spannungen am Volumenelement $dx\,dy\,dz$ einer Platte.

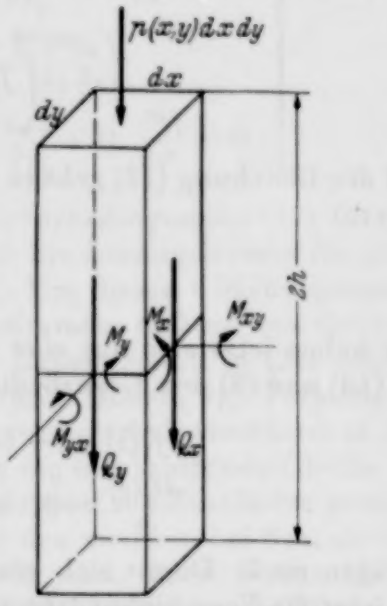

Abb. 3. Schnittkräfte am Plattenelement $dx\,dy \cdot 2h$.

Die Funktion $f_2(z)$ wollen wir so normieren, daß Q_x und Q_y im Ansatz (6) die gesamten Querkräfte in den Schnitten x = konst. und y = konst. sind (Abb. 3):

$$Q_x = \int_{-h}^{+h} \tau_{xz}\, dz, \qquad Q_y = \int_{-h}^{+h} \tau_{yz}\, dz. \tag{9}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß

$$\int_{-h}^{+h} f_2(z)\, dz = 1 \tag{10}$$

sein muß. Die Funktion $f_2(z)$ gibt somit das Gesetz an, nach dem die Querkräfte über die Plattendicke verteilt sind.

Die in den Ansätzen (5) und (6) enthaltene Voraussetzung bringt keine weitere Einschränkung für den Genauigkeitsgrad der Theorie, die wir hier entwickeln wollen, und bestimmt lediglich die Form der Lösungen, die wir erhalten werden. Nur die den Gleichungen (3) zugrunde liegende Voraussetzung über die Starrheit der Platte in z-Richtung ($E_z = \infty$) schränkt den Gültigkeitsbereich unserer Theorie ein auf Platten nicht sehr großer Dicke und auf Plattenbereiche, die nur durch verteilte Kräfte belastet sind.

3. Gleichgewichtsbedingungen und Spannungs-Verschiebungsgleichungen. Die *Cauchy*schen Gleichgewichtsbedingungen an einem Körperelement lauten bekanntlich bei Vernach-

lässigung der Massenkräfte folgendermaßen (Abb. 2):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 , \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 , \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Führt man die Ansätze (5) und (6) in die dritte Gleichgewichtsbedingung ein, so erhält man

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) f_2(z) + p(x, y) \frac{df_1(z)}{dz} = 0 . \tag{12}$$

Daraus folgt, daß $f_2(z)$ der ersten Ableitung von $f_1(z)$ nach z proportional sein muß. Um der Normvorschrift (10) zu genügen, müssen wir

$$f_2(z) = \frac{df_1(z)}{dz} \tag{13}$$

setzen; denn dann ist in der Tat bei Berücksichtigung der Grenzbedingungen (7)

$$\int_{-h}^{+h} f_2(z)\, dz = \int_{-h}^{+h} \frac{df_1(z)}{dz}\, dz = f_1(z) \Big|_{-h}^{+h} = 1 ,$$

und die Gleichung (12) geht in die Gleichgewichtsbedingung an einem Plattenelement (Abb. 3) über:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x, y) = 0 . \tag{14}$$

Wir haben jetzt also nur *eine* unbekannte Verteilungsfunktion $f_1(z)$ zu bestimmen, die wegen (7), (13) und (8) den Grenzbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &f_1(z) = -1 \quad \text{bei} \quad z = -h , \quad f_1(z) = 0 \quad \text{bei} \quad z = +h , \\ &\frac{df_1(z)}{dz} = 0 \quad \text{bei} \quad z = \pm h , \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

genügen muß. Damit sich ein geometrisch möglicher Verschiebungszustand ergibt, drücken wir jetzt die Verschiebungskomponenten durch $f_1(z)$ aus. Aus dem Elastizitätsgesetz

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} ,$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}$$

folgt durch Integration mit (6) und (13) und unter Beachtung, daß w von z unabhängig ist,

$$\left.\begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2(1+\nu)}{E} f_1(z)\, Q_x + u_0(x, y) . \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{2(1+\nu)}{E} f_1(z)\, Q_y + v_0(x, y) . \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Hier sind $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ die von z unabhängigen Integrationskonstanten, Q_x, Q_y die ebenfalls nur von x und y abhängigen resultierenden Querkräfte am Plattenelement.

Aus (16) erhält man durch Differentiation die Verzerrungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2(1+\nu)}{E} f_1(z) \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} , \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{2(1+\nu)}{E} f_1(z) \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} , \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + \frac{2(1+\nu)}{E} f_1(z) \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

und hieraus mit Hilfe des Elastizitätsgesetzes (2) und (3) die Spannungen

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{E z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{2}{1-\nu}f_1(z)\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial Q_y}{\partial y}\right)+\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\frac{\partial v_0}{\partial y}\right),\\
\sigma_y &= -\frac{E z}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{2}{1-\nu}f_1(z)\left(\nu\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\right)+\frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right),\\
\tau_{xy} &= -\frac{E z}{1-\nu^2}(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+f_1(z)\left(\frac{\partial Q_x}{\partial y}+\frac{\partial Q_y}{\partial x}\right)+\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Drückt man die Querschubspannungen (6) gemäß (13) ebenfalls durch die Funktion $f_1(z)$ aus also

$$\tau_{xz}=Q_x\frac{df_1(z)}{dz},\qquad \tau_{yz}=Q_y\frac{df_1(z)}{dz}, \tag{19}$$

und führt dann (18) und (19) in die ersten beiden Bedingungen (11) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{E z}{1-\nu^2}\frac{\partial\Delta w}{\partial x}+\frac{2}{1-\nu}f_1(z)\left[\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_y}{\partial x\,\partial y}\right]\\
&\qquad+\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}\right]+Q_x\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}=0,\\
&-\frac{E z}{1-\nu^2}\frac{\partial\Delta w}{\partial y}+\frac{2}{1-\nu}f_1(z)\left[\frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_y}{\partial x^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x\,\partial y}\right]\\
&\qquad+\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}\right]+Q_y\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Zusammen mit der Gleichgewichtsbedingung (14) und den Grenzbedingungen (15) für $f_1(z)$ bilden diese Gleichungen ein vollständiges System, aus dem sich die Lösungsformen für sämtliche möglichen Spannungszustände der Platte ablesen lassen. Um dieses Gleichungssystem exakt auflösen zu können, muß man die Funktion $f_1(z)$ so bestimmen, daß sie den Grenzbedingungen (15) genügt und ein identisches Verschwinden der linken Seiten in (20) möglich macht. Wie leicht einzusehen [wir werden das später auch bestätigt finden, vgl. Formeln (22) und (77)], erhält man infolge dieser Bedingungen für $f_1(z)$ zwei grundsätzlich verschiedene Formen, je nach dem, ob in (20) die in z linearen, d. h. die Durchbiegung w enthaltende Glieder von Null verschieden sind oder nicht. Wir müssen also zwei Hauptgruppen von Zuständen getrennt behandeln: den ersten, bei dem sich die Platte durchbiegt, und den zweiten, bei dem sie eben bleibt ($w=0$), ohne daß der Spannungszustand dabei eben sein wird. Diese beiden Hauptgruppen umfassen als Sonderfälle auch die Zustände für $p=0$, bei denen also die Platte nur durch Randkräfte belastet ist. Die Funktionen u_0 und v_0 sind immer so zu bestimmen, daß keine ebenen Spannungszustände entstehen, die wir aus unseren Betrachtungen ausschließen wollen.

Die *Reißner*sche Theorie umfaßt ebenfalls die beiden Hauptzustände, nur kommen sie bei ihm infolge der summarischen Erfüllung der Verträglichkeitsbedingungen nicht ganz deutlich zum Vorschein. Die *Kirchhoff*sche Theorie kennt natürlich wegen der Vernachlässigung der Querschubverzerrungen nur den Zustand der gebogenen Platte. Den anschaulicheren Biegefall wollen wir jetzt als ersten eingehend untersuchen.

4. Differentialgleichungen der gebogenen Platte. Im Falle der gebogenen Platte sind die Ableitungen von Δw nach x und y im allgemeinen von Null verschieden. Damit enthalten die Gleichungen (20) außer den Gliedern mit $f_1(z)$ und $f_1''(z)$ als Faktor noch in z lineare und von z unabhängige Terme. Die Gleichungen (20) kann man also nur dann identisch erfüllen, wenn sich die Funktion $f_1(z)$ aus einer Konstanten, aus einem in z linearen Anteil und schließlich aus einem Anteil, der seiner zweiten Ableitung nach z proportional ist, zusammensetzt. Mit anderen Worten, $f_1(z)$ muß die Gestalt haben

$$f_1(z)=a_0+a_1 z+a_2\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{l}+a_3\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{l}, \tag{21}$$

wo l noch eine Unbekannte Größe von der Dimension einer Länge ist. Statt der hyperbolischen Funktionen im Ansatz (21) könnten wir auch Kreisfunktionen wählen; nur wird man dann in praktisch wichtigen Fällen für l einen imaginären Wert erhalten.

Die Konstanten a_0, a_1, a_2, a_3 bestimmen wir so, daß die Grenzbedingungen (15) erfüllt sind und erhalten dann für $f_1(z)$ die Gleichung

$$f_1(z) = \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{\frac{z}{l}\,\mathfrak{Cof}\frac{h}{l} - \mathfrak{Sin}\frac{z}{l}}{\frac{h}{l}\,\mathfrak{Cof}\frac{h}{l} - \mathfrak{Sin}\frac{h}{l}}\right]. \tag{22}$$

Wir bilden noch die zweite Ableitung nach z

$$\frac{d^2 f_1(z)}{dz^2} = -\frac{1}{2\,l^2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\frac{z}{l}}{\frac{h}{l}\,\mathfrak{Cof}\frac{h}{l} - \mathfrak{Sin}\frac{h}{l}} \tag{23}$$

und betrachten jetzt die Gleichungen (20) mit (22) und (23). Damit die linken Seiten der Gleichungen (20) identisch gleich Null sind, müssen die Anteile mit z^0 als Faktor für sich verschwinden. Aus dem Nullsetzen der von z unabhängigen Anteile folgt

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y} = \frac{1+\nu}{E}\left[\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_y}{\partial x\,\partial y}\right],\\
&\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y} = \frac{1+\nu}{E}\left[\frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x\,\partial y}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Faßt man hier die Verschiebungen u_0, v_0 als Funktionen der Querkräfte Q_x, Q_y auf, so erhält man folgende Partikularlösungen der Gleichungen (24):

$$u_0(x, y) = \frac{1+\nu}{E}\,Q_x(x, y), \qquad v_0(x, y) = \frac{1+\nu}{E}\,Q_y(x, y). \tag{25}$$

Mit diesen Lösungen werden die Verschiebungen u, v, die Verzerrungen ε_x, ε_y, γ_{xy} und die Spannungen σ_x, σ_y, τ_{xy} bei $z = 0$ ebenfalls gleich Null, wovon man sich auf Grund der Gleichungen (16) bis (18) mit (22) und (25) leicht überzeugen kann. Die Partikularlösungen (25) geben somit den Verschiebungs- und Spannungszustand der „Platte“ wieder. Die Lösungen der homogenen Gleichungen (24) (mit $Q_x = Q_y = 0$) haben die Form

$$u_0^h = A \sin\beta x\,\mathfrak{Sin}\,\beta y, \qquad v_0^h = -A\cos\beta x\,\mathfrak{Cof}\,\beta y \qquad \text{usw.}$$

und sind maßgebend für den ebenen Spannungszustand der Platte, der für uns nicht in Betracht kommt.

Nun setzen wir in den Gleichungen (20) die Anteile mit z und $\mathfrak{Sin}(z/l)$ als Faktor gleich Null und erhalten dann aus jeder von ihnen je zwei der folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \frac{1}{1-\nu}\,\frac{\frac{1}{l}\,\mathfrak{Cof}\frac{h}{l}}{\frac{h}{l}\,\mathfrak{Cof}\frac{h}{l} - \mathfrak{Sin}\frac{h}{l}}\left[\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_y}{\partial x\,\partial y}\right] = 0,\\
&\frac{1}{1-\nu}\left[\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_y}{\partial x\,\partial y}\right] + \frac{1}{2\,l^2}\,Q_x = 0
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{1}{1-\nu}\,\frac{\frac{1}{l}\,\mathfrak{Cof}\frac{h}{l}}{\frac{h}{l}\,\mathfrak{Cof}\frac{h}{l} - \mathfrak{Sin}\frac{h}{l}}\left[\frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x\,\partial y}\right] = 0,\\
&\frac{1}{1-\nu}\left[\frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x\,\partial y}\right] + \frac{1}{2\,l^2}\,Q_y = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Zu diesen Gleichungen kommt noch die Bedingung (14) für das Gleichgewicht der Kräfte in z-Richtung an einem Plattenelement, die wir hier nochmal aufschreiben wollen:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -\,p(x, y). \tag{28}$$

Aus diesem vollständigen Gleichungssystem für w, Q_x, Q_y und die noch unbekannte Länge l wollen wir jetzt einfachere Differentialgleichungen für die gebogene Platte ableiten. Eliminiert man die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke in den Gleichungen (26) und (27),

so erhält man

$$Q_x = -K(l)\frac{\partial \Delta w}{\partial x}, \qquad Q_y = -K(l)\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \tag{29}$$

mit der Abkürzung

$$K(l) = \frac{E}{1-\nu^2}\,2\,l^2\left[h - l\,\mathfrak{Tg}\,\frac{h}{l}\right]. \tag{30}$$

Führt man nun die Werte (29) in (28) ein, so erhält man die Differentialgleichung für die Durchbiegung w

$$K(l)\,\Delta\Delta w = p(x, y)\,, \tag{31}$$

die sich von der üblichen Plattengleichung

$$K\,\Delta\Delta w = p(x, y) \tag{a}$$

nur dadurch unterscheidet, daß hier an Stelle der Biegesteifigkeit $K = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ infolge des nichtlinearen Spannungsverlauf über die Plattendicke eine „verallgemeinerte" Biegesteifigkeit $K(l)$ von der Form (30) tritt, die von einer noch unbekannten Größe l abhängt. Um diese Größe zu bestimmen, kehren wir zu den Gleichungen (26) und (27) zurück, aus denen wir bis jetzt nur die Ausdrücke (29) abgeleitet haben, die aber noch keinen vollständigen Ersatz für die Ausgangsgleichungen bilden. Wir führen nun die Ausdrücke (29) in die ersten oder die zweiten Gleichungen (26) und (27) ein und erhalten in beiden Fällen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\Delta w}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2\,l^2}\,\frac{\partial \Delta w}{\partial x} = 0\,, \\ \frac{\partial \Delta\Delta w}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2\,l^2}\,\frac{\partial \Delta w}{\partial y} = 0\,. \end{aligned}\right| \tag{32}$$

Das Gleichungssystem (29), (31) und (32) [mit der Abkürzung $K(l)$ (30)] ist dem Gleichungssystem (26), (27) und (28) vollständig gleichwertig und stellt bei Zugrundelegung kartesischer Koordinaten die gesuchte Lösungsform für die gebogene Platte dar.

Die Gleichungen (32) kann man als die Bestimmungsgleichungen für die Größe l betrachten. Da aber l nach Voraussetzung eine konstante Größe sein soll, so folgt aus ihnen zugleich, daß die Funktion $w(x, y)$ und wegen (31) auch die Lastfunktion $p(x, y)$ zu einer bestimmten Klasse von Funktionen gehören müssen. Bei Zugrundelegung der hier gewählten kartesischen Koordinaten gehören zu dieser Klasse offenbar die Kreis- und die Hyperbelfunktionen und Produkte aus ihnen in der Art [1]

$$\left.\begin{aligned} w = w_\alpha \sin\alpha\,x\,, \quad w = w_\beta \sin\beta\,y\,, \quad w = w_{\alpha\beta}\sin\alpha\,x\sin\beta\,y \quad \text{usw.} \\ p = p_\alpha \sin\alpha\,x\,, \quad p = p_\beta \sin\beta\,y\,, \quad p = p_{\alpha\beta}\sin\alpha\,x\sin\beta\,y \quad \text{usw.} \end{aligned}\right| \tag{33}$$

Eine vorgegebene Lastfunktion $p(x, y)$ muß also bei Anwendung unserer Methode nach diesen Funktionen zerlegt werden. Eine allgemeine Bedeutung haben nur die in (33) angeführten Kreisfunktionen, da sich jede Lastfunktion für Platten endlicher Abmessungen durch eine einfache oder doppelte *Fourier*reihe darstellen läßt. Die Notwendigkeit einer *Fourier*zerlegung der Lastfunktion bedeutet praktisch keinen Nachteil unserer Theorie, da auch bei Anwendung der Theorien von *Kirchhoff* oder *Reißner* für die Zahlenrechnung solche Zerlegungen fast immer vorgenommen werden.

Der Rechnungsgang bei Anwendung unsere Methode gestaltet sich folgendermaßen: Für jedes Glied der *Fourier*reihe ist zunächst aus (32) der zugehörige Wert l_α, l_β oder $l_{\alpha\beta}$ zu berechnen, sodann ist die Gleichung (31) für jedes Glied mit $K(l_\alpha) = K_\alpha$ usw. zu integrieren. Bei der Summation der einzelnen Glieder in den Reihen für die Verschiebungen und Spannungen muß man schließlich beachten, daß jedem Glied ein anderes l entspricht. Diese Rechnung ist einfacher, als sie auf den ersten Blick zu sein scheint, da sich die Gleichungen (32) für $w(x, y)$ nach (33) auf die Gleichung

$$\frac{2\,l^2}{1-\nu}\,\Delta w + w = 0 \tag{34}$$

reduzieren, und das hat wesentliche Vereinfachungen in den Formeln für die Verschiebungen, Spannungen und Schnittkräfte zur Folge.

[1] Legt man z. B. die Polarkoordinaten zugrunde, so wird die Klasse der zulässigen Funktionen durch Kreis- und Zylinderfunktionen gebildet.

Unsere Methode ist auch ohne *Fourier*zerlegung anwendbar, wenn die Lastfunktion eine Konstante ist. Wegen (31) ist dann auch $\Delta\Delta w = \text{konst.}$ und aus (32) ergibt sich hierfür $l = \infty$. Diesen Sonderfall, der auch für die möglicherweise vorhandene Konstante in einer *Fourier*zerlegung der Lastfunktion von Bedeutung ist, wollen wir im nächsten Abschnitt besprechen.

5. Gebogene Platte mit konstanter Flächenbelastung; Sonderfall der homogenen Lösungsform der gebogenen Platte ($p = 0$). Wie schon erwähnt, ist für $p = p_0 = \text{konst.}$ und dementsprechend $\Delta\Delta u = \text{konst.}$ die Größe l nach (32) gleich unendlich. Für $l \to \infty$, $h/l \to 0$ strebt aber die verallgemeinerte Biegesteifigkeit $K(l)$ nach (30) wegen

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{h}{l} = \frac{h}{l} - \frac{h^3}{3\,l^3} + \cdots$$

dem Wert der üblichen Biegesteifigkeit zu:

$$\lim_{l\to\infty} K(l) = \frac{E\,2\,h^3}{3(1-\nu^2)} = K\,. \tag{35}$$

Gleichzeitig nimmt die Funktion $f_1(z)$ nach (22), wie man leicht zeigen kann, die ausgeartete Form an

$$f_1(z) = \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{3}{2}\,\frac{z}{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right], \tag{36}$$

die in der *Reißner*schen Theorie auch für eine beliebige Belastung angenommen wird. Dieser Funktion entspricht nach (13) eine parabolische Verteilungsfunktion für die Querschubspannungen

$$f_2(z) = \frac{df_1}{dz} = \frac{3}{4\,h}\left[1 - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right]. \tag{37}$$

Wir wollen von jetzt an alle Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungsgrößen, die der Partikularlösung der Gleichung (31) für die gebogene Platte entsprechen, durch ein hochgestelltes eingeklammertes p kennzeichnen. Diese Vereinbarung müssen wir treffen, um die Partikularlösungen der gebogenen Platte von den homogenen Lösungen und den Lösungen für die eben bleibende Platte unterscheiden zu können, für die wir andere Kennzeichnungen einführen werden. Dementsprechend schreiben wir die Gleichung (31) mit $K(\infty) = K$ und $p = p_0$ folgendermaßen:

$$K\,\Delta\Delta w^{(p)} = p_0\,. \tag{38}$$

Wir geben hier keine speziellen Partikularlösungen der Gleichung (38) an, die an sich leicht zu finden sind, sondern drücken die mechanisch interessierenden Größen durch $w^{(p)}$ aus.

Für die Querkräfte erhält man aus (29) und (35)

$$Q_x^{(p)} = -\,K\,\frac{\partial\Delta w^{(p)}}{\partial x}, \qquad Q_y^{(p)} = -\,K\,\frac{\partial\Delta w^{(p)}}{\partial y}\,. \tag{39}$$

Für die Verschiebungen u und v ergibt sich aus den Gleichungen (16) mit (25), (36) und (39)

$$\left.\begin{aligned} u^{(p)} &= -\,z\,\frac{\partial w^{(p)}}{\partial x} - \frac{3(1+\nu)}{2\,E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial\Delta w^{(p)}}{\partial x}\,, \\ v^{(p)} &= -\,z\,\frac{\partial w^{(p)}}{\partial y} - \frac{3(1+\nu)}{2\,E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial\Delta w^{(p)}}{\partial y}\,. \end{aligned}\right| \tag{40}$$

Die ersten Glieder der rechten Seiten gelten auch für $G_z = \infty$, die zweiten Glieder ergeben sich aus der Berücksichtigung der Querschubverzerrung.

Die Verzerrungen erhält man entsprechend aus den Gleichungen (17) oder unmittelbar durch die Differentiation der Gleichungen (40) zu

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x^{(p)} &= -\,z\,\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2} - \frac{3(1+\nu)}{2\,E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial^2\Delta w^{(p)}}{\partial x^2}\,, \\ \varepsilon_y^{(p)} &= -\,z\,\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2} - \frac{3(1+\nu)}{2\,E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial^2\Delta w^{(p)}}{\partial y^2}\,, \\ \gamma_{xy}^{(p)} &= -\,2\,z\,\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x\,\partial y} - \frac{3(1+\nu)}{E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial^2\Delta w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}\,. \end{aligned}\right| \tag{41}$$

Die Gleichungen für die Spannungen $\sigma_x^{(p)}$, $\sigma_y^{(p)}$, $\tau_{xy}^{(p)}$ findet man entweder aus (18) mit (25), (36) und (39) oder aus den Beziehungen (41) für die Verzerrungen mit Hilfe des *Hooke*schen Gesetzes. Berücksichtigt man noch die Plattengleichung (38), so nehmen sie die Form an

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x^{(p)} &= -\frac{E z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2}\right)-\frac{3}{2}\left[\frac{z}{h}-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]\left[K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial x^2}+\frac{\nu}{1-\nu}p_0\right],\\
\sigma_y^{(p)} &= -\frac{E z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2}\right)-\frac{3}{2}\left[\frac{z}{h}-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]\left[K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial y^2}+\frac{\nu}{1-\nu}p_0\right],\\
\tau_{xy}^{(p)} &= -\frac{E z}{1-\nu^2}(1-\nu)\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}-\frac{3}{2}\left[\frac{z}{h}-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Zur vollständigen Beschreibung des Spannungszustandes geben wir noch die Formeln für $\sigma_z^{(p)}$ und für die Querschubspannungen an. Aus (5), (19), (36) und (39) folgt

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z^{(p)} &= p_0\frac{1}{2}\left[-1+\frac{3}{2}\frac{z}{h}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right],\\
\tau_{xz}^{(p)} &= -K\frac{3}{4h}\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]\frac{\partial \Delta w^{(p)}}{\partial x},\\
\tau_{yz}^{(p)} &= -K\frac{3}{4h}\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]\frac{\partial \Delta w^{(p)}}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Zur Kontrolle der Beziehungen (42) und (43) kann man sie in die *Cauchy*schen Gleichgewichtsbedingungen (11) einsetzen und man überzeugt sich leicht, daß sie diese Bedingungen in der Tat erfüllen. Aus (42) sieht man, daß die Spannungen, die parallel zur Plattenmittelfläche wirken, nicht linear über die Dicke der Platte verteilt sind, wie das aus der *Kirchhoff*schen Theorie folgt und wie dies auch *Reißner* voraussetzt.

Schließlich wollen wir noch die Gleichungen für die Resultanten des Spannungszustandes vervollständigen, von denen wir bis jetzt nur die für die Querkräfte (39) angeführt haben. Die Biege- und Drillmomente (Abb. 3) errechnen sich mit Hilfe der Gleichungen (42) zu

$$\left.\begin{aligned}
M_x^{(p)} &= \int_{-h}^{+h}\sigma_x^{(p)} z\,dz = -K\left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2}\right)-\frac{4h^2}{5}K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial x^2}-\frac{4\nu h^2}{5(1-\nu)}p_0,\\
M_y^{(p)} &= \int_{-h}^{+h}\sigma_y^{(p)} z\,dz = -K\left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2}\right)-\frac{4h^2}{5}K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial y^2}-\frac{4\nu h^2}{5(1-\nu)}p_0,\\
M_{xy}^{(p)} &= \int_{-h}^{+h}\tau_{xy}^{(p)} z\,dz = -K(1-\nu)\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}-\frac{4h^2}{5}K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Damit haben wir alle Berechnungsformeln für den Spannungszustand der gleichmäßig belasteten Platte aufgestellt. Für $p=0$ ist darin der Fall der unbelasteten Platte (homogene Lösung) enthalten. Die homogenen Lösungsformen der gebogenen Platte wollen wir durch ein hochgestelltes h kennzeichnen. Demnach soll $w^{(h)}$ irgendeine Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta\Delta w^{(h)}=0 \tag{45}$$

sein. Die Gleichungen für die Querkräfte, Verschiebungen und Verzerrungen haben im Falle $p=0$ dieselbe Form wie die Gleichungen (39), (40), (41) für $p\neq 0$, nur ist jetzt statt (p) das Zeichen (h) einzusetzen. Die Gleichungen für die Spannungen σ_x, σ_y und für die Schnittmomente M_x, M_y werden durch Wegfall der letzten Glieder einfacher.

Das Problem der durch Randkräfte gebogenen Platte ohne Flächenbelastung wurde bereits früher von *Love*[1] ohne der Voraussetzung $E_z=\infty$ gelöst. Zum Vergleich bringen wir seine Ergebnisse für die Schnittmomente in unserer Schreibweise:

$$M_x^{(h)} = -K\left(\frac{\partial^2 w^{(h)}}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(h)}}{\partial y^2}\right)+\frac{8+\nu}{10}h^2K\frac{\partial^2 \Delta w^{(h)}}{\partial y^2},$$

[1] *A. E. H. Love*, Lehrbuch der Elastizität (deutsche Ausgabe), S. 544.

Unsere Methode ist auch ohne *Fourier*zerlegung anwendbar, wenn die Lastfunktion eine Konstante ist. Wegen (31) ist dann auch $\Delta\Delta w = \text{konst.}$ und aus (32) ergibt sich hierfür $l = \infty$. Diesen Sonderfall, der auch für die möglicherweise vorhandene Konstante in einer *Fourier*zerlegung der Lastfunktion von Bedeutung ist, wollen wir im nächsten Abschnitt besprechen.

5. Gebogene Platte mit konstanter Flächenbelastung; Sonderfall der homogenen Lösungsform der gebogenen Platte ($p = 0$). Wie schon erwähnt, ist für $p = p_0 = \text{konst.}$ und dementsprechend $\Delta\Delta u = \text{konst.}$ die Größe l nach (32) gleich unendlich. Für $l \to \infty$, $h/l \to 0$ strebt aber die verallgemeinerte Biegesteifigkeit $K(l)$ nach (30) wegen

$$\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,\frac{h}{l} = \frac{h}{l} - \frac{h^3}{3\,l^3} + \cdots$$

dem Wert der üblichen Biegesteifigkeit zu:

$$\lim_{l\to\infty} K(l) = \frac{E\,2\,h^3}{3(1-\nu^2)} = K\,. \tag{35}$$

Gleichzeitig nimmt die Funktion $f_1(z)$ nach (22), wie man leicht zeigen kann, die ausgeartete Form an

$$f_1(z) = \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{3}{2}\,\frac{z}{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right], \tag{36}$$

die in der *Reißner*schen Theorie auch für eine beliebige Belastung angenommen wird. Dieser Funktion entspricht nach (13) eine parabolische Verteilungsfunktion für die Querschubspannungen

$$f_2(z) = \frac{df_1}{dz} = \frac{3}{4\,h}\left[1 - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right]. \tag{37}$$

Wir wollen von jetzt an alle Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungsgrößen, die der Partikularlösung der Gleichung (31) für die gebogene Platte entsprechen, durch ein hochgestelltes eingeklammertes p kennzeichnen. Diese Vereinbarung müssen wir treffen, um die Partikularlösungen der gebogenen Platte von den homogenen Lösungen und den Lösungen für die eben bleibende Platte unterscheiden zu können, für die wir andere Kennzeichnungen einführen werden. Dementsprechend schreiben wir die Gleichung (31) mit $K(\infty) = K$ und $p = p_0$ folgendermaßen:

$$K\,\Delta\Delta w^{(p)} = p_0\,. \tag{38}$$

Wir geben hier keine speziellen Partikularlösungen der Gleichung (38) an, die an sich leicht zu finden sind, sondern drücken die mechanisch interessierenden Größen durch $w^{(p)}$ aus.

Für die Querkräfte erhält man aus (29) und (35)

$$Q_x^{(p)} = -\,K\,\frac{\partial\Delta w^{(p)}}{\partial x}, \qquad Q_y^{(p)} = -\,K\,\frac{\partial\Delta w^{(p)}}{\partial y}\,. \tag{39}$$

Für die Verschiebungen u und v ergibt sich aus den Gleichungen (16) mit (25), (36) und (39)

$$\left.\begin{aligned} u^{(p)} &= -\,z\,\frac{\partial w^{(p)}}{\partial x} - \frac{3(1+\nu)}{2\,E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial\Delta w^{(p)}}{\partial x}\,,\\ v^{(p)} &= -\,z\,\frac{\partial w^{(p)}}{\partial y} - \frac{3(1+\nu)}{2\,E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial\Delta w^{(p)}}{\partial y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Die ersten Glieder der rechten Seiten gelten auch für $G_z = \infty$, die zweiten Glieder ergeben sich aus der Berücksichtigung der Querschubverzerrung.

Die Verzerrungen erhält man entsprechend aus den Gleichungen (17) oder unmittelbar durch die Differentiation der Gleichungen (40) zu

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x^{(p)} &= -\,z\,\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2} - \frac{3(1+\nu)}{2\,E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial^2\Delta w^{(p)}}{\partial x^2}\,,\\ \varepsilon_y^{(p)} &= -\,z\,\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2} - \frac{3(1+\nu)}{2\,E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial^2\Delta w^{(p)}}{\partial y^2}\,,\\ \gamma_{xy}^{(p)} &= -\,2\,z\,\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x\,\partial y} - \frac{3(1+\nu)}{E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial^2\Delta w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Die Gleichungen für die Spannungen $\sigma_x^{(p)}$, $\sigma_y^{(p)}$, $\tau_{xy}^{(p)}$ findet man entweder aus (18) mit (25), (36) und (39) oder aus den Beziehungen (41) für die Verzerrungen mit Hilfe des *Hooke*schen Gesetzes. Berücksichtigt man noch die Plattengleichung (38), so nehmen sie die Form an

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x^{(p)} &= -\frac{E z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2}\right)-\frac{3}{2}\left[\frac{z}{h}-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]\left[K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial x^2}+\frac{\nu}{1-\nu}p_0\right],\\
\sigma_y^{(p)} &= -\frac{E z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2}\right)-\frac{3}{2}\left[\frac{z}{h}-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]\left[K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial y^2}+\frac{\nu}{1-\nu}p_0\right],\\
\tau_{xy}^{(p)} &= -\frac{E z}{1-\nu^2}(1-\nu)\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}-\frac{3}{2}\left[\frac{z}{h}-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Zur vollständigen Beschreibung des Spannungszustandes geben wir noch die Formeln für $\sigma_z^{(p)}$ und für die Querschubspannungen an. Aus (5), (19), (36) und (39) folgt

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z^{(p)} &= p_0\frac{1}{2}\left[-1+\frac{3}{2}\frac{z}{h}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right],\\
\tau_{xz}^{(p)} &= -K\frac{3}{4h}\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]\frac{\partial \Delta w^{(p)}}{\partial x},\\
\tau_{yz}^{(p)} &= -K\frac{3}{4h}\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]\frac{\partial \Delta w^{(p)}}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Zur Kontrolle der Beziehungen (42) und (43) kann man sie in die *Cauchy*schen Gleichgewichtsbedingungen (11) einsetzen und man überzeugt sich leicht, daß sie diese Bedingungen in der Tat erfüllen. Aus (42) sieht man, daß die Spannungen, die parallel zur Plattenmittelfläche wirken, nicht linear über die Dicke der Platte verteilt sind, wie das aus der *Kirchhoff*schen Theorie folgt und wie dies auch *Reißner* voraussetzt.

Schließlich wollen wir noch die Gleichungen für die Resultanten des Spannungszustandes vervollständigen, von denen wir bis jetzt nur die für die Querkräfte (39) angeführt haben. Die Biege- und Drillmomente (Abb. 3) errechnen sich mit Hilfe der Gleichungen (42) zu

$$\left.\begin{aligned}
M_x^{(p)} &= \int_{-h}^{+h}\sigma_x^{(p)} z\,dz = -K\left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2}\right)-\frac{4h^2}{5}K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial x^2}-\frac{4\nu h^2}{5(1-\nu)}p_0,\\
M_y^{(p)} &= \int_{-h}^{+h}\sigma_y^{(p)} z\,dz = -K\left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2}\right)-\frac{4h^2}{5}K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial y^2}-\frac{4\nu h^2}{5(1-\nu)}p_0,\\
M_{xy}^{(p)} &= \int_{-h}^{+h}\tau_{xy}^{(p)} z\,dz = -K(1-\nu)\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}-\frac{4h^2}{5}K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Damit haben wir alle Berechnungsformeln für den Spannungszustand der gleichmäßig belasteten Platte aufgestellt. Für $p=0$ ist darin der Fall der unbelasteten Platte (homogene Lösung) enthalten. Die homogenen Lösungsformen der gebogenen Platte wollen wir durch ein hochgestelltes h kennzeichnen. Demnach soll $w^{(h)}$ irgendeine Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta\Delta w^{(h)}=0 \tag{45}$$

sein. Die Gleichungen für die Querkräfte, Verschiebungen und Verzerrungen haben im Falle $p=0$ dieselbe Form wie die Gleichungen (39), (40), (41) für $p\neq 0$, nur ist jetzt statt (p) das Zeichen (h) einzusetzen. Die Gleichungen für die Spannungen σ_x, σ_y und für die Schnittmomente M_x, M_y werden durch Wegfall der letzten Glieder einfacher.

Das Problem der durch Randkräfte gebogenen Platte ohne Flächenbelastung wurde bereits früher von *Love*[1] ohne der Voraussetzung $E_z=\infty$ gelöst. Zum Vergleich bringen wir seine Ergebnisse für die Schnittmomente in unserer Schreibweise:

$$M_x^{(h)} = -K\left(\frac{\partial^2 w^{(h)}}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(h)}}{\partial y^2}\right)+\frac{8+\nu}{10}h^2K\frac{\partial^2 \Delta w^{(h)}}{\partial y^2},$$

[1] *A. E. H. Love*, Lehrbuch der Elastizität (deutsche Ausgabe), S. 544.

Unsere Methode ist auch ohne *Fourier*zerlegung anwendbar, wenn die Lastfunktion eine Konstante ist. Wegen (31) ist dann auch $\Delta\Delta w =$ konst. und aus (32) ergibt sich hierfür $l = \infty$. Diesen Sonderfall, der auch für die möglicherweise vorhandene Konstante in einer *Fourier*zerlegung der Lastfunktion von Bedeutung ist, wollen wir im nächsten Abschnitt besprechen.

5. Gebogene Platte mit konstanter Flächenbelastung; Sonderfall der homogenen Lösungsform der gebogenen Platte ($p = 0$). Wie schon erwähnt, ist für $p = p_0 =$ konst. und dementsprechend $\Delta\Delta u =$ konst. die Größe l nach (32) gleich unendlich. Für $l \to \infty$, $h/l \to 0$ strebt aber die verallgemeinerte Biegesteifigkeit $K(l)$ nach (30) wegen

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{h}{l} = \frac{h}{l} - \frac{h^3}{3\,l^3} + \cdots$$

dem Wert der üblichen Biegesteifigkeit zu:

$$\lim_{l\to\infty} K(l) = \frac{E\,2\,h^3}{3(1-\nu^2)} = K\,. \tag{35}$$

Gleichzeitig nimmt die Funktion $f_1(z)$ nach (22), wie man leicht zeigen kann, die ausgeartete Form an

$$f_1(z) = \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{3}{2}\,\frac{z}{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right], \tag{36}$$

die in der *Reißner*schen Theorie auch für eine beliebige Belastung angenommen wird. Dieser Funktion entspricht nach (13) eine parabolische Verteilungsfunktion für die Querschubspannungen

$$f_2(z) = \frac{df_1}{dz} = \frac{3}{4\,h}\left[1 - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right]. \tag{37}$$

Wir wollen von jetzt an alle Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungsgrößen, die der Partikularlösung der Gleichung (31) für die gebogene Platte entsprechen, durch ein hochgestelltes eingeklammertes p kennzeichnen. Diese Vereinbarung müssen wir treffen, um die Partikularlösungen der gebogenen Platte von den homogenen Lösungen und den Lösungen für die eben bleibende Platte unterscheiden zu können, für die wir andere Kennzeichnungen einführen werden. Dementsprechend schreiben wir die Gleichung (31) mit $K(\infty) = K$ und $p = p_0$ folgendermaßen:

$$K\,\Delta\Delta w^{(p)} = p_0\,. \tag{38}$$

Wir geben hier keine speziellen Partikularlösungen der Gleichung (38) an, die an sich leicht zu finden sind, sondern drücken die mechanisch interessierenden Größen durch $w^{(p)}$ aus.

Für die Querkräfte erhält man aus (29) und (35)

$$Q_x^{(p)} = -\,K\,\frac{\partial\Delta w^{(p)}}{\partial x}\,, \qquad Q_y^{(p)} = -\,K\,\frac{\partial\Delta w^{(p)}}{\partial y}\,. \tag{39}$$

Für die Verschiebungen u und v ergibt sich aus den Gleichungen (16) mit (25), (36) und (39)

$$\left.\begin{aligned} u^{(p)} &= -\,z\,\frac{\partial w^{(p)}}{\partial x} - \frac{3(1+\nu)}{2\,E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial\Delta w^{(p)}}{\partial x}\,,\\ v^{(p)} &= -\,z\,\frac{\partial w^{(p)}}{\partial y} - \frac{3(1+\nu)}{2\,E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial\Delta w^{(p)}}{\partial y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Die ersten Glieder der rechten Seiten gelten auch für $G_z = \infty$, die zweiten Glieder ergeben sich aus der Berücksichtigung der Querschubverzerrung.

Die Verzerrungen erhält man entsprechend aus den Gleichungen (17) oder unmittelbar durch die Differentiation der Gleichungen (40) zu

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x^{(p)} &= -\,z\,\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2} - \frac{3(1+\nu)}{2\,E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial^2\Delta w^{(p)}}{\partial x^2}\,,\\ \varepsilon_y^{(p)} &= -\,z\,\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2} - \frac{3(1+\nu)}{2\,E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial^2\Delta w^{(p)}}{\partial y^2}\,,\\ \gamma_{xy}^{(p)} &= -\,2\,z\,\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x\,\partial y} - \frac{3(1+\nu)}{E}\left[\frac{z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] K\,\frac{\partial^2\Delta w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Die Gleichungen für die Spannungen $\sigma_x^{(p)}$, $\sigma_y^{(p)}$, $\tau_{xy}^{(p)}$ findet man entweder aus (18) mit (25), (36) und (39) oder aus den Beziehungen (41) für die Verzerrungen mit Hilfe des *Hooke*schen Gesetzes. Berücksichtigt man noch die Plattengleichung (38), so nehmen sie die Form an

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x^{(p)} &= -\frac{E z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2}\right)-\frac{3}{2}\left[\frac{z}{h}-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]\left[K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial x^2}+\frac{\nu}{1-\nu}p_0\right],\\
\sigma_y^{(p)} &= -\frac{E z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2}\right)-\frac{3}{2}\left[\frac{z}{h}-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]\left[K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial y^2}+\frac{\nu}{1-\nu}p_0\right],\\
\tau_{xy}^{(p)} &= -\frac{E z}{1-\nu^2}(1-\nu)\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}-\frac{3}{2}\left[\frac{z}{h}-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Zur vollständigen Beschreibung des Spannungszustandes geben wir noch die Formeln für $\sigma_z^{(p)}$ und für die Querschubspannungen an. Aus (5), (19), (36) und (39) folgt

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z^{(p)} &= p_0\,\frac{1}{2}\left[-1+\frac{3}{2}\frac{z}{h}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right],\\
\tau_{xz}^{(p)} &= -K\,\frac{3}{4h}\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]\frac{\partial \Delta w^{(p)}}{\partial x},\\
\tau_{yz}^{(p)} &= -K\,\frac{3}{4h}\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]\frac{\partial \Delta w^{(p)}}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Zur Kontrolle der Beziehungen (42) und (43) kann man sie in die *Cauchy*schen Gleichgewichtsbedingungen (11) einsetzen und man überzeugt sich leicht, daß sie diese Bedingungen in der Tat erfüllen. Aus (42) sieht man, daß die Spannungen, die parallel zur Plattenmittelfläche wirken, nicht linear über die Dicke der Platte verteilt sind, wie das aus der *Kirchhoff*schen Theorie folgt und wie dies auch *Reißner* voraussetzt.

Schließlich wollen wir noch die Gleichungen für die Resultanten des Spannungszustandes vervollständigen, von denen wir bis jetzt nur die für die Querkräfte (39) angeführt haben. Die Biege- und Drillmomente (Abb. 3) errechnen sich mit Hilfe der Gleichungen (42) zu

$$\left.\begin{aligned}
M_x^{(p)} &= \int_{-h}^{+h}\sigma_x^{(p)}\,z\,dz = -K\left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2}\right)-\frac{4h^2}{5}K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial x^2}-\frac{4\nu h^2}{5(1-\nu)}p_0,\\
M_y^{(p)} &= \int_{-h}^{+h}\sigma_y^{(p)}\,z\,dz = -K\left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2}\right)-\frac{4h^2}{5}K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial y^2}-\frac{4\nu h^2}{5(1-\nu)}p_0,\\
M_{xy}^{(p)} &= \int_{-h}^{+h}\tau_{xy}^{(p)}\,z\,dz = -K(1-\nu)\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}-\frac{4h^2}{5}K\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Damit haben wir alle Berechnungsformeln für den Spannungszustand der gleichmäßig belasteten Platte aufgestellt. Für $p=0$ ist darin der Fall der unbelasteten Platte (homogene Lösung) enthalten. Die homogenen Lösungsformen der gebogenen Platte wollen wir durch ein hochgestelltes h kennzeichnen. Demnach soll $w^{(h)}$ irgendeine Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta\Delta w^{(h)}=0 \tag{45}$$

sein. Die Gleichungen für die Querkräfte, Verschiebungen und Verzerrungen haben im Falle $p=0$ dieselbe Form wie die Gleichungen (39), (40), (41) für $p\neq 0$, nur ist jetzt statt (p) das Zeichen (h) einzusetzen. Die Gleichungen für die Spannungen σ_x, σ_y und für die Schnittmomente M_x, M_y werden durch Wegfall der letzten Glieder einfacher.

Das Problem der durch Randkräfte gebogenen Platte ohne Flächenbelastung wurde bereits früher von *Love*[1] ohne der Voraussetzung $E_z=\infty$ gelöst. Zum Vergleich bringen wir seine Ergebnisse für die Schnittmomente in unserer Schreibweise:

$$M_x^{(h)} = -K\left(\frac{\partial^2 w^{(h)}}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w^{(h)}}{\partial y^2}\right)+\frac{8+\nu}{10}h^2K\frac{\partial^2 \Delta w^{(h)}}{\partial y^2},$$

[1] *A. E. H. Love*, Lehrbuch der Elastizität (deutsche Ausgabe), S. 544.

$$M_y^{(h)} = -K\left(\frac{\partial^2 w^{(h)}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w^{(h)}}{\partial x^2}\right) + \frac{8+\nu}{10} h^2 K \frac{\partial^2 \Delta w^{(h)}}{\partial x^2},$$

$$M_{xy}^{(h)} = -K(1-\nu)\frac{\partial^2 w^{(h)}}{\partial x\,\partial y} - \frac{8+\nu}{10} h^2 K \frac{\partial^2 \Delta w^{(h)}}{\partial x\,\partial y}.$$

Daß in der Formel von *Love* für $M_x^{(h)}$ (und entsprechend für $M_y^{(h)}$) $+\partial^2 \Delta w/\partial y^2$ statt $-\partial^2 \Delta w/\partial x^2$ steht, hat wegen $\Delta\Delta w^{(h)} = 0$ nichts zu bedeuten. Wichtig ist, daß die Faktoren vor den Korrekturgliedern sich nur um $1+\nu/8$ unterscheiden, was die Zulässigkeit der Arbeitshypothese $E_z = \infty$ bestätigt.

Auch der Sonderfall der Biegung einer Platte mit konstanter Flächenbelastung läßt sich noch exakt lösen. Da diese Rechnung ziemlich umfangreich ist, schreiben wir nur das Ergebnis auf:

$$M_x^{(p)} = -K\left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2}\right) - \frac{8+\nu}{10} h^2 K \frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial x^2} - \frac{(4+\nu)\nu}{10(1-\nu)} h^2 p_0 \quad \text{usw.} \tag{46}$$

Der Vergleich mit den Gleichungen (44) zeigt, daß die angenäherte Theorie auch für verteilte Flächenbelastung ausreichend genau ist. Das zweite Korrekturglied (der letzte Term in den Formeln für $M_x^{(p)}$ und $M_y^{(p)}$) ist allerdings nach der angenäherten Theorie fast zwei mal so groß wie nach der exakten Rechnung. Berücksichtigt man aber, daß $p_0 = K\,\Delta\Delta w^{(p)}$ ist und faßt die Korrekturglieder in (44) und (46) zusammen, so erhält man für $M_x^{(p)}$ nach der angenäherten Rechnung

$$-\frac{4h^2}{5(1-\nu)} K\left(\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2}\right),$$

nach der exakten Rechnung

$$-\frac{4h^2}{5(1-\nu)} K\left[\left(1-\frac{3\nu}{8}\right)\frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{\nu}{4}\right)\nu \frac{\partial^2 \Delta w^{(p)}}{\partial y^2}\right]$$

und entsprechend für $M_y^{(p)}$. Hieraus erkennt man, daß die angenäherte Rechnung einen größeren Fehler nur für die mit ν als Faktor behaftete Ableitung von $\Delta w^{(p)}$ im Korrekturglied liefert, und das ist auch dann unwesentlich, wenn diese Ableitung groß ist im Vergleich zur Ableitung nach der anderen Koordinate, weil dieser Fehler dann nur für das kleinere Schnittbiegemoment von Bedeutung ist.

6. Partikularlösungen in *Fourier*reihen für die durch nicht gleichförmige Flächenlasten gebogene Platte. Die von uns aufgestellten Differentialgleichungen (31) und (32) für die gebogene Platte können infolge der Bedingung $l =$ konst., wie im Abschnitt 4 bereits ausgeführt wurde, außer durch die Lastfunktion $p(x, y) =$ konst. noch durch Lastfunktionen erfüllt werden, die sich aus Kreis- oder Hyperbelfunktionen zusammensetzen. Der Rechnungsgang ist für beide Funktionenarten der gleiche. Da aber beliebige Lastverteilungen auf Platten endlicher Abmessungen sich im allgemeinen nur (in Form von *Fourier*reihen) durch Kreisfunktionen darstellen lassen, so bringen wir die Ergebnisse nur für diesen Fall — es ist der schon früher von *Woinowsky-Krieger*[1] exakt ($E_z = E$) behandelte Fall. Unsere Ergebnisse sind infolge der Arbeitshypothese $E_z = \infty$ weniger exakt, dafür aber fast ebenso einfach wie die nach der klassischen Plattentheorie.

Wir nehmen also an, daß die Lastfunktion in Form einer *Fourier*reihe

$$\begin{aligned} p(x, y) = &\sum_m \sum_n p_{mn}^{(1)} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y + \sum_m \sum_n p_{mn}^{(2)} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ &+ \sum_m \sum_n p_{mn}^{(3)} \sin \alpha x \cos \beta_n y + \sum_m \sum_n p_{mn}^{(4)} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \end{aligned} \tag{47}$$

gegeben ist mit

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{2a}, \qquad \beta_n = \frac{n\pi}{2b}, \tag{48}$$

$m, n = 0, 1, 2, \ldots$, jedoch nicht gleichzeitig gleich Null.

Die Längen $2a$ und $2b$ sind die halben Längen der Entwicklungsintervalle in x und y-Richtung. Das möglicherweise vorhandene konstante Glied in (47) haben wir hier weggelassen, da der dazugehörige Spannungszustand bereits im vorhergehenden Abschnitt berechnet wurde.

[1] A. a. O. S. 210.

Von der Reihe (47) wird angenommen, daß sie konvergiert, d. h. daß ihre Koeffizienten bei wachsenden m, n zumindestens wie die erste Potenz von $1/m\,n$ (oder von $1/m$ bei $n=0$ und $1/n$ bei $m=0$) abnehmen.

Entsprechend der Plattengleichung (31) mit noch unbekanntem $K(l)$ muß die Durchbiegungsfunktion $w(x, y)$ für $p(x, y)$ nach (47) die Form haben

$$w^{(p)}(x, y) = \sum_m \sum_n W^{(1)}_{m\,n} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y + \sum_m \sum_n W^{(2)}_{m\,n} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y + \sum_n \sum_n W^{(3)}_{m\,n} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y + \sum_m \sum_n W^{(4)} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \,. \tag{49}$$

Führt man diesen Lösungsansatz in (32) ein, so erhält man für die Längen $l = l_{m\,n}$ die Gleichung

$$\alpha_m^2 + \beta_n^2 - \frac{1-\nu}{2\,l_{m\,n}^2} = 0$$

oder

$$l_{m\,n}^2 = \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} = \frac{2(1-\nu)}{\pi^2} \frac{a\,b}{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}} \,. \tag{50}$$

Damit schreibt sich der Ausdruck (30) für die „Biegesteifigkeit" $K(l_{m\,n}) = K_{m\,n}$ in der Form

$$K_{m\,n} = \frac{E}{1-\nu^2}\, 2\, l_{m\,n}^2 \left[h - l_{m\,n}\, \mathfrak{Tg} \frac{h}{l_{m\,n}} \right] \tag{51}$$

oder

$$K_{m\,n} = \frac{E}{1+\nu} \frac{h - l_{m\,n}\, \mathfrak{Tg} \frac{h}{l_{m\,n}}}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \,. \tag{51a}$$

Jetzt führen wir die Reihen (47) und (49) in die Plattengleichung (31) ein und erhalten für alle vier Amplituden $W_{m\,n}$ der Durchbiegungsfunktion unter Weglassung der Zeichen (1), (2) usw. die gleich gebauten Formeln

$$W_{m\,n} = \frac{p_{m\,n}}{K_{m\,n} (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \,, \tag{52}$$

oder mit (51a)

$$W_{m\,n} = \frac{1+\nu}{E} \frac{p_{m\,n}}{\left[h - l_{m\,n}\, \mathfrak{Tg} \frac{h}{l_{m\,n}} \right] (\alpha_m^2 + \beta_n^2)} \,, \tag{52a}$$

womit die Durchbiegung der Platte vollständig bestimmt ist.

Bevor wir jetzt zur Berechnung der Verschiebungen u, v, der Verzerrungen ε_x, ε_y, $\gamma_{x\,y}$ und der Spannungen σ_x, σ_y, $\tau_{x\,y}$ übergehen, wollen wir ganz allgemein zeigen, wie sich die zugehörigen Berechnungsformeln (16) bis (18) für Durchbiegungsfunktionen (49) vereinfachen, da sich für solche Funktionen die beiden Gleichungen (32) auf die eine vereinfachte Gleichung (34) reduzieren. Aus (16), (22), (25) und (29) erhält man zunächst für die Verschiebungen u und v die Beziehungen

$$u = - z \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1+\nu}{E} \frac{z - \frac{l\, \mathfrak{Sin} \frac{z}{l}}{\mathfrak{Cof} \frac{h}{l}}}{h - l\, \mathfrak{Tg} \frac{h}{l}} K(l) \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \,,$$

$$v = - z \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1+\nu}{E} \frac{z - \frac{l\, \mathfrak{Sin} \frac{z}{l}}{\mathfrak{Cof} \frac{h}{l}}}{h - l\, \mathfrak{Tg} \frac{h}{l}} K(l) \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \,.$$

Mit $K(l)$ nach (30) folgt hieraus

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{2l^2}{1-\nu}\left[z - \frac{l\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{l}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l}}\right]\frac{\partial \Delta w}{\partial x},$$

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{2l^2}{1-\nu}\left[z - \frac{l\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{l}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l}}\right]\frac{\partial \Delta w}{\partial y}.$$

Beachtet man schließlich (34), so gelangt man zu ganz einfachen Formeln für die Verschiebungskomponenten u, v:

$$u = -\frac{l\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{l}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l}}\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad v = -\frac{l\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{l}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l}}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{53}$$

Entsprechend kann man auch die Gleichungen (17) und (18) für die Verzerrungen und Spannungen umformen. Diese vereinfachten Gleichungen kann man aber auch unmittelbar aus (53) durch Differentiieren und durch Einsetzen in das *Hooke*sche Gesetz (2) und (3) ableiten. Man erhält

$$\varepsilon_x = -\frac{l\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{l}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \varepsilon_y = -\frac{l\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{l}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \gamma_{xy} = -2\frac{l\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{l}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l}}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \tag{54}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{l\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{l}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\
\sigma_y &= -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{l\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{l}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\
\tau_{xy} &= -\frac{E}{1-\nu^2}(1-\nu)\frac{l\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{l}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l}}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Schließlich stellen wir auch die Gleichungen für die Schnittmomente auf. Mit

$$\int_{-h}^{+h} z\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{l}\,dz = 2l\,\mathfrak{Cof}\frac{h}{l}\left[h - l\,\mathfrak{Tg}\frac{h}{l}\right]$$

und mit $K(l)$ nach (30) folgt aus (55)

$$\left.\begin{aligned}
M_x &= \int_{-h}^{+h}\sigma_x z\,dz = -K(l)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\
M_y &= \int_{-h}^{+h}\sigma_y z\,dz = -K(l)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\
M_{xy} &= \int_{-h}^{+h}\tau_{xy} z\,dz = -K(l)(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Die Querkräfte errechnen sich nach wie vor aus den Gleichungen (29).

Für die Funktionen $p(x, y)$, $w(x, y)$ in Form von *Fourier*reihen werden auch die übrigen Zustandsgrößen der Platte durch solche Reihen dargestellt. Wir schreiben sie abkürzend ohne

Summenzeichen und mit $s_x \,||\, \sin \alpha_m x$, $s_y \,||\, \sin \beta_n y$, $c_x \,||\, \cos \alpha_m x$, $c_y \,||\, \cos \beta_n y$. Wählen wir vor den einzelnen Gliedergattungen dieser Reihen geeignete Vorzeichen

$$\left.\begin{aligned} u^{(p)} &\to U^{(1)}_{mn}\, s_x\, c_y + U^{(2)}_{mn}\, s_x\, s_y - U^{(3)}_{mn}\, c_x\, c_y - U^{(4)}\, c_x\, s_y\,, \\ v^{(p)} &\to V^{(1)}_{mn}\, c_x\, s_y - V^{(2)}_{mn}\, c_x\, c_y + V^{(3)}_{mn}\, s_x\, s_y - V^{(4)}_{mn}\, s_x\, c_y\,, \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{(p)}_x &\to S^{(1)}_{xmn}\, c_x\, c_y + S^{(2)}_{xmn}\, c_x\, s_y + S^{(3)}_{xmn}\, s_x\, c_y + S^{(4)}_{xmn}\, s_x\, s_y\,, \\ \sigma^{(p)}_y &\to S^{(1)}_{ymn}\, c_x\, c_y + S^{(2)}_{ymn}\, c_x\, s_y + S^{(3)}_{ymn}\, s_x\, c_y + S^{(4)}_{ymn}\, s_x\, s_y\,, \\ \tau^{(p)}_{xy} &\to -T^{(1)}_{mn}\, s_x\, s_y + T^{(2)}_{mn}\, s_x\, c_y + T^{(3)}_{mn}\, c_x\, s_y - T^{(4)}_{mn}\, c_x\, c_y\,, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

$$\left.\begin{aligned} M^{(p)}_x &\to M^{(1)}_{xmn}\, c_x\, c_y + M^{(2)}_{xmn}\, c_x\, s_y + M^{(3)}_{xmn}\, s_x\, c_y + M^{(4)}_{xmn}\, s_x\, s_y\,, \\ M^{(p)}_y &\to M^{(1)}_{ymn}\, c_x\, c_y + M^{(2)}_{ymn}\, c_x\, s_y + M^{(3)}_{ymn}\, s_x\, c_y + M^{(4)}_{ymn}\, s_x\, s_y\,, \\ M^{(p)}_{xy} &\to -M^{(1)}_{xymn}\, s_x\, s_y + M^{(2)}_{xymn}\, s_x\, c_y + M^{(3)}_{xymn}\, c_x\, s_y - M^{(4)}_{xymn}\, c_x\, c_y\,, \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

$$\left.\begin{aligned} Q^{(p)}_x &\to -Q^{(1)}_{xmn}\, s_x\, c_y - Q^{(2)}_{xmn}\, s_x\, s_y + Q^{(3)}_{xmn}\, c_x\, c_y + Q^{(4)}_{xmn}\, c_x\, s_y\,, \\ Q^{(p)}_y &\to -Q^{(1)}_{ymn}\, c_x\, s_y + Q^{(2)}_{ymn}\, c_x\, c_y - Q^{(3)}_{ymn}\, s_x\, s_y + Q^{(4)}_{ymn}\, s_x\, c_y\,, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau^{(p)}_{xz} &\to -q^{(1)}_{xmn}\, s_x\, c_y - q^{(2)}_{xmn}\, s_x\, s_y + q^{(3)}_{xmn}\, c_x\, c_y + q^{(4)}_{xmn}\, c_x\, s_y\,, \\ \tau^{(p)}_{yz} &\to -q^{(1)}_{ymn}\, c_x\, s_y + q^{(2)}_{ymn}\, c_x\, c_y - q^{(3)}_{ymn}\, s_x\, s_y + q^{(4)}_{ymn}\, s_x\, c_y\,, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

$$\sigma^{(p)}_z \to S^{(1)}_{zmn}\, c_x\, c_y + S^{(2)}_{zmn}\, c_x\, s_y + S^{(3)}_{zmn}\, s_x\, c_y + S^{(4)}_{zmn}\, s_x\, s_y\,, \tag{62}$$

so erhalten wir für die Beiwerte aller vier möglichen Kombinationen von Kreisfunktionen unter Weglassen der Zeichen (1), (2) usw. die folgenden gleichlautenden Formeln: Für die Verschiebungen aus (57), (53) mit (49) und (52)

$$U_{mn} = \frac{l_{mn}\, \mathfrak{Sin}\frac{z}{l_{mn}}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l_{mn}}} \frac{p_{mn}\,\alpha_m}{K_{mn}(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}\,, \qquad V_{mn} = \frac{l_{mn}\, \mathfrak{Sin}\frac{z}{l_{mn}}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l_{mn}}} \frac{p_{mn}\,\beta_n}{K_{mn}(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}\,, \tag{63}$$

für die Spannungen aus (58), (55) mit (49), (52) oder (52a) und $K = E\,2\,h^3/3(1-\nu^2)$

$$\left.\begin{aligned} S_{xmn} &= \frac{3}{2h^3}\frac{K}{K_{mn}} \frac{l_{mn}\, \mathfrak{Sin}\frac{z}{l_{mn}}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l_{mn}}} \frac{p_{mn}(\alpha_m^2+\nu\beta_n^2)}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2} = \frac{l_{mn}\, \mathfrak{Sin}\frac{z}{l_{mn}}}{(1-\nu)\,\mathfrak{Cof}\frac{h}{l_{mn}}\left[h - l_{mn}\,\mathfrak{Tg}\frac{h}{l_{mn}}\right]} \frac{p_{mn}(\alpha_m^2+\nu\beta_n^2)}{\alpha_m^2+\beta_n^2}\,, \\ S_{ymn} &= \frac{3}{2h^3}\frac{K}{K_{mn}} \frac{l_{mn}\, \mathfrak{Sin}\frac{z}{l_{mn}}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l_{mn}}} \frac{p_{mn}(\beta_n^2+\nu\alpha_m^2)}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2} = \frac{l_{mn}\, \mathfrak{Sin}\frac{z}{l_{mn}}}{(1-\nu)\,\mathfrak{Cof}\frac{h}{l_{mn}}\left[h - l_{mn}\,\mathfrak{Tg}\frac{h}{l_{mn}}\right]} \frac{p_{mn}(\beta_n^2+\nu\alpha_m^2)}{\alpha_m^2+\beta_n^2}\,, \\ T_{mn} &= \frac{3(1-\nu)}{2h^3}\frac{K}{K_{mn}} \frac{l_{mn}\, \mathfrak{Sin}\frac{z}{l_{mn}}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l_{mn}}} \frac{p_{mn}\,\alpha_m\,\beta_n}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2} = \frac{l_{mn}\, \mathfrak{Sin}\frac{z}{l_{mn}}}{\mathfrak{Cof}\frac{h}{l_{mn}}\left(h - l_{mn}\,\mathfrak{Tg}\frac{h}{l_{mn}}\right)} \frac{p_{mn}\,\alpha_m\,\beta_n}{\alpha_m^2+\beta_n^2}\,, \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

für die Schnittmomente aus (59), (56) mit (49) und (52)

$$M_{xmn} = \frac{p_{mn}(\alpha_m^2+\nu\beta_n^2)}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}\,, \qquad M_{ymn} = \frac{p_{mn}(\beta_n^2+\nu\alpha_m^2)}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}\,, \qquad M_{xymn} = (1-\nu)\frac{p_{mn}\,\alpha_m\,\beta_n}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}\,, \tag{65}$$

für die Querkräfte aus (60), (29) mit (49) und (52)

$$Q_{xmn} = \frac{p_{mn}\,\alpha_m}{\alpha_m^2+\beta_n^2}\,, \qquad Q_{ymn} = \frac{p_{mn}\,\beta_n}{\alpha_m^2+\beta_n^2}\,, \tag{66}$$

für die Querschubspannungen aus (61), (60) und (19)

$$q_{xmn} = Q_{xmn}\frac{df_{1\,mn}}{dz}\,, \qquad q_{ymn} = C_{ymn}\frac{df_{1\,mn}}{dz}\,, \tag{67}$$

für die Normalspannung σ_z aus (62), (49) und (5)

$$S_{zmn} = p_{mn} \cdot f_{1mn} , \tag{68}$$

wo entsprechend (22)

$$f_{1mn} = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{z \operatorname{Cof}\frac{h}{l_{mn}} - l_{mn} \operatorname{Sin}\frac{z}{l_{mn}}}{h \operatorname{Cof}\frac{h}{l_{mn}} - l_{mn} \operatorname{Sin}\frac{h}{l_{mn}}} \right), \tag{69}$$

$$\frac{df_{1mn}}{dz} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Cof}\frac{h}{l_{mn}} - \operatorname{Cof}\frac{z}{l_{mn}}}{h \operatorname{Cof}\frac{h}{l_{mn}} - l_{mn} \operatorname{Sin}\frac{h}{l_{mn}}} . \tag{70}$$

Wir vergleichen unsere Ergebnisse zunächst mit denen der klassischen Plattentheorie. Die Formel (52) für die Amplitude der Durchbiegung hat dieselbe Form wie nach der *Kirchhoff*schen Theorie, nur daß bei uns im Nenner statt der Biegesteifigkeit $K = E2h^3/3(1-\nu^2)$ die „verallgemeinerte" Biegesteifigkeit K_{mn} nach (51) steht. Bezeichnen wir die Amplitude der Durchbiegung nach der klassischen Theorie mit $\overline{W}_{mn}$, so erhält man aus (52) und (51) für das Verhältnis $\overline{W}_{mn}/W_{mn}$ die Beziehung

$$\frac{\overline{W}_{mn}}{W_{mn}} = \frac{K_{mn}}{K} = \frac{3\, l_{mn}^2}{h^2}\left(1 - \frac{l_{mn}}{h} \operatorname{Tg}\frac{h}{l_{mn}}\right). \tag{71}$$

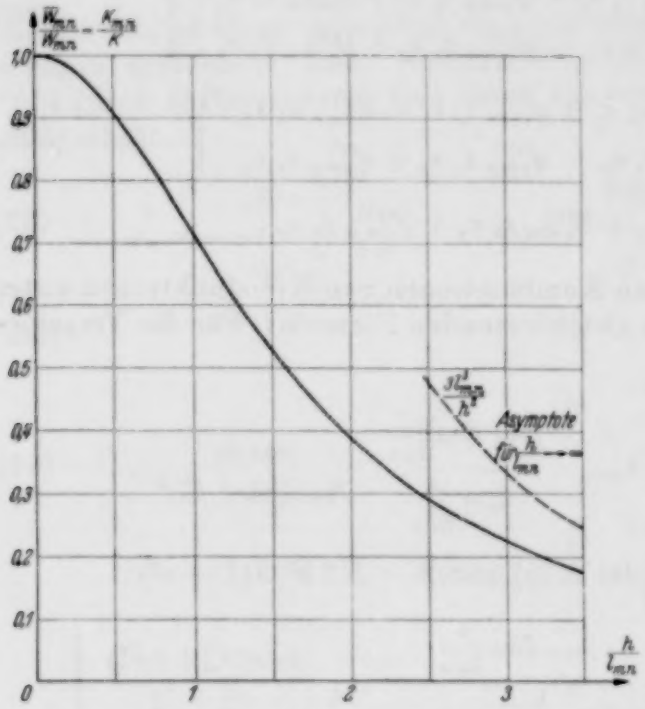

Abb. 4.

In Abb. 4 ist dieses Verhältnis in Abhängigkeit von h/l_{mn} dargestellt. Bei kleinen m und n ist l_{mn} von derselben Größenordnung wie die Abmessungen der Platte in Richtung der Mittelfläche [siehe Gleichung (50)], und somit ist dann für dünne Platten das Verhältnis $h/l_{mn} \ll 1$. Für $h/l_{mn} \to 0$ strebt aber $\overline{W}_{mn}/W_{mn}$ wegen

$$\operatorname{Tg}\frac{h}{l_{mn}} = \frac{h}{l_{mn}} - \frac{1}{3}\left(\frac{h}{l_{mn}}\right)^3 + \cdots$$

gegen Eins, so daß wir für die niedrigsten Harmonischen in (49) nahezu dieselben Werte erhalten, wie nach der *Kirchhoff*schen Theorie. Bei größeren m und n wird l_{mn} kleiner, h/l_{mn} wächst an und das Verhältnis $\overline{W}_{mn}/W_{mn}$ nimmt ab, wobei es bei $h/l_{mn} \to \infty$ wie $3\,(l_{mn}/h)^2$ nach Null strebt. Mit anderen Worten, die Amplituden höherer Harmonischer werden infolge der Berücksichtigung der Schubverzerrungen größer, als nach der klassischen Theorie. Daß unsere Reihe (49) trotzdem konvergiert, wenn die *Fourier*reihe (47) es tut, erkennt man am einfachsten aus (52a).

Wir übergehen jetzt die Gleichungen für die Verschiebungskomponenten u und v und betrachten die Gleichungen (58) und (64) für die Spannungskomponenten $\sigma_x^{(p)}$, $\sigma_y^{(p)}$ und $\tau_{xy}^{(p)}$. Aus den an erster Stelle stehenden Ausdrücken in (64) erkennt man, daß bei kleinen m und n, d. h. bei $h/l_{mn} \ll 1$ und $z/l_{mn} \ll 1$ unsere Rechnung näherungsweise denselben, über die Plattendicke linearen Verlauf der Beiwerte S_{xmn}, S_{ymn}, T_{mn} liefert, den man aus der klassischen Theorie für sämtliche Werte von m und n erhält. Die Beiwerte der höheren Harmonischen haben dagegen abweichend von der *Kirchhoff*schen Theorie einen wesentlich nichtlinearen Verlauf über die Plattendicke mit Spannungspitzen bei $z = \pm h$. In den Fällen aber, wenn die Flächenbelastung $p\,(x,y)$ ziemlich gleichmäßig ist, werden die höheren Harmonischen nur wenig ins Gewicht fallen, so daß insgesamt unsere Rechnung dann ebenfalls einen näherungsweise linearen Verlauf der Spannungskomponenten $\sigma_x^{(p)}$, $\sigma_y^{(p)}$, $\tau_{xy}^{(p)}$ liefern wird. Die Konvergenz der Reihen für diese Spannungskomponenten ist aus den an zweiter Stelle stehenden Ausdrücken in (64) zu erkennen.

Eine vollständige Übereinstimmung mit den Ergebnissen der klassischen Theorie zeigen die Formeln (65) und (66) für die Schnittmomente und die Schnittquerkräfte. Diese Tatsache

ist von praktischer Bedeutung, da bei den meisten Rechnungen die Randbedingungen nicht für die örtlichen Werte der Spannungen an der zylindrischen Plattenbegrenzung, sondern für die Spannungsresultanten aufgestellt werden.

Schließlich betrachten wir die Gleichungen (67) bis (70) für die Beiwerte der Querschubspannungen und der Nomalspannung σ_z. Bei kleinen m und n, d. h. h/l_{mn} und $z/l_{mn} \ll 1$ gehen die Verteilungsfunktionen $f_{1\,mn}/\partial f_{1\,mn}/\partial z$ in

$$\left.\begin{aligned} f_{1\,mn} &= \frac{1}{2}\left[-1+\frac{3}{2}\,\frac{z}{h}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right], \\ \frac{\partial f_{1\,mn}}{\partial z} &= \frac{3}{4\,h}\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

über. Mit anderen Worten, bei kleinen m und n liefert unsere Rechnung auch für die Querschubspannungen und die Normalspannung σ_z denselben Verlauf der Beiwerte über die Plattendicke, den man aus der klassischen Theorie für sämtliche m und n erhält.

Zusammenfassend kann man sagen, daß bei endlichen (aber kleinen) Plattendicken die Ergebnisse der klassischen Theorie im allgemeinen nur in den niedrigsten Gliedern mit unseren Ergebnissen (praktisch) übereinstimmen; die Ergebnisse beider Theorien für die Schnittmomente und die Schnittquerkräfte zeigen dagegen eine vollständige und von der Plattendicke unabhängige Übereinstimmung. Entsprechendes gilt auch für die Ergebnisse von *Woinowsky-Krieger* [1], mit dem Unterschied, daß seine Rechnung ($E_z = \infty$) nur für die Schnittquerkräfte genau dieselben Gleichungen wie die *Kirchhoff*sche Theorie liefert. Seine Formeln für die Schnittmomente unterscheiden sich von den Formeln (65), aber nur in Gliedern, die die Querkontraktionszahl ν als Faktor haben. Entwickelt man die mit ν als Faktor behafteten Terme bei *Woinowsky-Krieger*, so zeigt es sich, daß dieser Unterschied von den entsprechenden Gliedern in (65) sich nur in quadratischen Größen $(\alpha_m^2+\beta_n^2)\,h^2$ äußert, d. h. bei kleineren m und n sehr klein ist. Damit ist die Genauigkeit unserer Ergebnisse für die Schnittmomente ausreichend nachgewiesen; sie haben außerdem den Vorteil, genau so einfach zu sein, wie die Ergebnisse der klassischen Plattentheorie.

7. Der zur Mittelfläche antimetrische Spannungszustand einer eben bleibenden Platte. Bei der Untersuchung der gebogenen Platte haben wir gefunden, daß der zugehörige Spannungszustand durch eine Biegefunktion $w(x, y)$ bestimmt wird, die der Bipotentialgleichung (31) genügen muß. Die Lösungen dieser Gleichung erlauben wie in der *Kirchhoff*schen Theorie an jedem Rand nur zwei Randbedingungen zu erfüllen. Um auch einer dritten Randbedingung genügen zu können, müssen wir die Lösungen für den antimetrischen Spannungszustand einer eben bleibenden Platte hinzuziehen, den wir jetzt untersuchen wollen.

Die ersten beiden Grundgleichungen für den Spannungszustand einer eben bleibenden Platte erhält man aus den *Cauchy*schen Gleichgewichtsbedingungen (20), wenn man dort $w = 0$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2}{1-\nu}f_1(z)\left(\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\,\frac{\partial^2 Q_y}{\partial x\,\partial y}\right) \\ &\qquad +\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\,\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}\right)+Q_x\,\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}=0\,, \\ &\frac{2}{1-\nu}f_1(z)\left(\frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^2 Q_y}{\partial x^2}+\frac{1+\nu}{2}\,\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x\,\partial y}\right) \\ &\qquad +\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{1+\nu}{2}\,\frac{\partial^2 u_0}{x\,y}\right)+Q_y\,\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Die Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte in z-Richtung bleibt unverändert (siehe Gleichung (14)):

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=-\,p(x, y)\,. \tag{74}$$

Die in (73) enthaltene Verteilungsfunktion $f_1(z)$ muß den Oberflächenbedingungen (15) genügen, die wir hier nochmal aufschreiben wollen:

$$f_1(z)=-1 \quad \text{bei } z=-h\,, \qquad f_1(z)=0 \quad \text{bei } z=+h\,, \tag{75}$$

[1] A. a. O. S. 210—213.

$$\frac{df_1(z)}{dz} = 0 \quad \text{bei } z = \pm h\,. \tag{76}$$

Die Funktion $f_1(z)$, die sowohl den Bedingungen (75), (76) genügt, als auch eine identische Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen (73) gestattet, muß jetzt offenbar folgende, von (22) abweichende Gestalt haben:

$$f_1(z) = \frac{1}{2}\left(-1 + \sin\frac{\mu\pi}{2}\sin\frac{\mu\pi z}{2h}\right) \qquad (\mu = 1, 3, 5, \ldots)\,. \tag{77}$$

Führt man (77) in (73) ein, so erhält man aus dem Nullsetzen der von z unabhängigen Glieder wie im Falle der gebogenen Platte [siehe Gleichung (25)]

$$u_0 = \frac{1+\nu}{E}Q_x\,, \qquad v_0 = \frac{1+\nu}{E}Q_y\,. \tag{78}$$

Das Nullsetzen der Glieder mit $\sin\frac{\mu\pi z}{2h}$ als Faktor liefert die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{1-\nu}\left[\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_y}{\partial x\,\partial y}\right] - Q_x\left(\frac{\mu\pi}{2h}\right)^2 = 0\,,\\ \frac{2}{1-\nu}\left[\frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x\,\partial y}\right] - Q_y\left(\frac{\mu\pi}{2h}\right)^2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, 3, \ldots)\,. \tag{79}$$

Nach einigen Umformungen und bei Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingung (74) folgt hieraus

$$\left.\begin{aligned} \Delta Q_x - Q_x\left(\frac{\mu\pi}{2h}\right)^2 = \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial p}{\partial x}\,,\\ \Delta Q_y - Q_y\left(\frac{\mu\pi}{2h}\right)^2 = \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial p}{\partial y}\,. \end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, 3, \ldots) \tag{80}$$

Für die drei Größen Q_x, Q_y und $p(x, y)$ haben wir drei Gleichungen (74) und (80). Daraus erkennt man, daß der Spannungszustand der eben bleibenden Platte nur für ganz bestimmte Lastfunktionen möglich ist. Um diese zu bestimmen, eliminieren wir aus (74) und (80) die Querkräfte Q_x und Q_y indem wir die erste Gleichung in (80) nach x die zweite nach y differentiieren und dann beide Gleichungen addieren. Berücksichtigen wir noch die Gleichgewichtsbedingung (74), so erhalten wir nach einigen Umformungen folgende Gleichung für $p(x, y)$ allein:

$$\Delta p - \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\mu\pi}{2h}\right)^2 p(x, y) = 0 \qquad (\mu = 1, 3, \ldots)\,. \tag{81}$$

Außer durch $p(x, y) = 0$ wird diese Differentialgleichung z. B. durch folgende Funktionen erfüllt:

$$\mathfrak{Cof}\,\gamma_1 x\,\mathfrak{Cof}\,\gamma_2 y \qquad \text{mit} \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\mu\pi}{2h}\right)^2,$$

$$\cos\frac{n\pi x}{2a}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma y \qquad \text{mit} \qquad \gamma^2 = \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\mu\pi}{2h}\right)^2 \quad \text{usw.}$$

Nun wird sich eine vorgegebene Lastfunktion nach diesen Funktionen im allgemeinen nicht entwickeln lassen, so daß der Spannungszustand der eben bleibenden Platte praktisch nur für $p = 0$ übrig bleibt. Das schadet aber nichts; nur muß man bei der Durchrechnung eines speziellen Plattenproblems davon ausgehen, daß die vorgegebene Flächenbelastung $p(x, y)$ zunächst durch den Spannungszustand der gebogenen Platte allein aufgenommen wird. Wie die Berechnung dieses Spannungszustandes über die *Fourier*entwicklung der Lastfunktion vor sich geht, haben wir bereits gezeigt. Die Randwerte dieses Spannungs- (und Verschiebungs-) Zustandes werden aber nur in Ausnahmefällen den gegebenen Randbedingungen genügen. Die Überlagerung des „homogenen" Spannungszustandes der gebogenen Platte (ohne Flächenbelastung, $\Delta\Delta w^{(h)} = 0$) wird im allgemeinen auch nicht ausreichen, um drei unabhängige Randbedingungen zu erfüllen. Diese Möglichkeit entsteht erst, wenn man noch den „homogenen" Spannungszustand der eben bleibenden Platte (ohne Flächenbelastung) überlagert. Die Differentialgleichungen für diesen Spannungszustand erhält man aus (74) und (80) mit $p = 0$. Bevor wir diese Gleichungen hinschreiben, wollen wir vereinbaren, alle Größen des „homogenen" Zustandes der eben bleibenden Platte durch ein hochgestelltes und eingeklammertes e zu

kennzeichnen. Da dieser Zustand von der Zahl $\mu = 1, 3, \ldots$ der Halbwellen in der Verteilungsfunktion $f_1(z)$ [siehe Gleichung (77)] abhängt, fügen wir noch das tiefgestellte Zeichen μ hinzu. Damit schreiben sich die Differentialgleichungen (74) und (80) mit $p = 0$ wie folgt:

$$\frac{\partial Q_{x\mu}^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{y\mu}^{(e)}}{\partial y} = 0\,, \tag{82}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta Q_{x\mu}^{(e)} - Q_{x\mu}^{(e)} \left(\frac{\mu\pi}{2h}\right)^2 &= 0\,, \\ \Delta Q_{y\mu}^{(e)} - Q_{y\mu}^{(e)} \left(\frac{\mu\pi}{2h}\right)^2 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, 3, 5, \ldots)\,. \tag{83}$$

Wir führen nun, wie es *Reißner* auch getan hat [1], eine Querkraftfunktion $\Phi_\mu^{(e)}$ derart ein, daß die Gleichgewichtsbedingung (82) identisch erfüllt ist:

$$Q_{x\mu}^{(e)} = \frac{\partial \Phi_\mu^{(e)}}{\partial y}\,, \qquad Q_{y\mu}^{(e)} = -\frac{\partial \Phi_\mu^{(e)}}{\partial x}\,. \tag{84}$$

Setzen wir das in (83) ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\Delta \Phi_\mu^{(e)} - \left(\frac{\mu\pi}{2h}\right)^2 \Phi_\mu^{(e)}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\Delta \Phi_\mu^{(e)} - \left(\frac{\mu\pi}{2h}\right)^2 \Phi_\mu^{(e)}\right] = 0\,.$$

Der in den Klammern stehende Ausdruck muß eine Konstante sein, die man auch gleich Null setzen kann, da der Spannungszustand der Platte nur von den Ableitungen von $\Phi_\mu^{(e)}$ nach x oder y abhängt [siehe Gleichungen (84)]. Somit erhalten wir für die Querkraftfunktion die Gleichung

$$\Delta \Phi_\mu^{(e)} - \left(\frac{\pi\mu}{2h}\right)^2 \Phi_\mu^{(e)} = 0 \qquad (\mu = 1, 3, 5, \ldots)\,, \tag{85}$$

deren Lösungen zusammen mit den Lösungen für die gebogene Platte drei Randbedingungen zu erfüllen gestatten.

Wir drücken jetzt sämtliche Zustandsgrößen der eben bleibenden Platte durch die Querkraftfunktion $\Phi_\mu^{(e)}$ aus. Mit (77), (78), (84) und $w = 0$ folgt aus (16), (17) und (18)

$$\left.\begin{aligned} u_\mu^{(e)} &= \frac{1+\nu}{E} \sin\frac{\mu\pi}{2} \sin\frac{\mu\pi z}{2h} \frac{\partial \Phi_\mu^{(e)}}{\partial y}\,, \\ v_\mu^{(e)} &= -\frac{1+\nu}{E} \sin\frac{\mu\pi}{2} \sin\frac{\mu\pi z}{2h} \frac{\partial \Phi_\mu^{(e)}}{\partial x}\,, \end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, 3, 5, \ldots) \tag{86}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{x\mu}^{(e)} &= \frac{1+\nu}{E} \sin\frac{\mu\pi}{2} \sin\frac{\mu\pi z}{2h} \frac{\partial^2 \Phi_\mu^{(e)}}{\partial x\, \partial y}\,, \\ \varepsilon_{y\mu}^{(e)} &= -\frac{1+\nu}{E} \sin\frac{\mu\pi}{2} \sin\frac{\mu\pi z}{2h} \frac{\partial^2 \Phi_\mu^{(e)}}{\partial x\, \partial y}\,, \\ \gamma_{xy}^{(e)} &= \frac{1+\nu}{E} \sin\frac{\mu\pi}{2} \sin\frac{\mu\pi z}{2h} \left(\frac{\partial^2 \Phi_\mu^{(e)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi_\mu^{(e)}}{\partial x^2}\right), \end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, 3, 5, \ldots) \tag{87}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{x\mu}^{(e)} &= \sin\frac{\mu\pi}{2} \sin\frac{\mu\pi z}{2h} \frac{\partial^2 \Phi_\mu^{(e)}}{\partial x\, \partial y}\,, \\ \sigma_{y\mu}^{(e)} &= -\sin\frac{\mu\pi}{2} \sin\frac{\mu\pi z}{2h} \frac{\partial^2 \Phi_\mu^{(e)}}{\partial x\, \partial y}\,, \\ \tau_{xy\mu}^{(e)} &= \frac{1}{2} \sin\frac{\mu\pi}{2} \sin\frac{\mu\pi z}{2h} \left(\frac{\partial^2 \Phi_\mu^{(e)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi_\mu^{(e)}}{\partial x^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, 3, 5, \ldots)\,. \tag{88}$$

Für die Querschubspannungen erhält man aus (19), (77) und (84) die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xz\mu}^{(e)} &= \frac{1}{2} \sin\frac{\mu\pi}{2} \frac{\mu\pi}{2h} \cos\frac{\mu\pi z}{2h} \frac{\partial \Phi_\mu^{(e)}}{\partial y}\,, \\ \tau_{yz\mu}^{(e)} &= -\frac{1}{2} \sin\frac{\mu\pi}{2} \frac{\mu\pi}{2h} \cos\frac{\mu\pi z}{2h} \frac{\partial \Phi_\mu^{(e)}}{\partial x}\,. \end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, 3, 5, \ldots) \tag{89}$$

[1] Siehe die zweite der unter Fußnote 1 von S. 267 genannten Arbeiten von *E. Reißner*.

Die Schnittquerkräfte haben wir bereits durch $\Phi_\mu^{(e)}$ ausgedrückt [siehe Gleichung (84)], es bleibt also nur noch die Beziehungen zwischen den Schnittmomenten und $\Phi_\mu^{(e)}$ aufzuschreiben. Mit

$$\int_{-h}^{+h} z \sin\frac{\mu\pi z}{2h}\,dz = 2\left(\frac{2h}{\mu\pi}\right)^2 \sin\frac{\mu\pi}{2}$$

erhält man aus (88)

$$\left.\begin{aligned} M_{x\mu}^{(e)} &= 2\left(\frac{2h}{\mu\pi}\right)^2 \frac{\partial^2\Phi_\mu^{(e)}}{\partial x\,\partial y}, \\ M_{y\mu}^{(e)} &= -2\left(\frac{2h}{\mu\pi}\right)^2 \frac{\partial^2\Phi_\mu^{(e)}}{\partial x\,\partial y}, \\ M_{xy}^{(e)} &= \left(\frac{2h}{\mu\pi}\right)^2 \left(\frac{\partial^2\Phi_\mu^{(e)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi_\mu^{(e)}}{\partial x^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, 3, 5, \ldots) \qquad (90)$$

Wir bemerken noch, daß unsere „homogene" Lösung für die eben bleibende Platte der Annahme $E_z = \infty$ nicht bedarf, d. h., daß sie auch für eine isotrope Platte ($E_z = E$) streng gilt. Denn für $w = 0$, $p = \sigma_z = 0$ hängt die Rechnung von der Größe von E_z überhaupt nicht ab. Daß wir in der Tat auch für $E_z \neq \infty$ einen möglichen Spannungszustand errechnet haben, erkennt man daraus, daß nach (88) $\sigma_{x\mu}^{(e)} + \sigma_{y\mu}^{(e)} = 0$ ist, und damit ist wegen $p = \sigma_z = 0$ die Dehnung $\varepsilon_z = 1/E_z[\sigma_z - \nu_z(\sigma_x + \sigma_y)]$ für ein beliebiges E_z gleich Null.

8. Vergleich mit der erweiterten Plattentheorie von *E. Reißner*; Schlußbemerkungen. Wie wir schon in der Einleitung ausgeführt haben, geht *Reißner* in seiner erweiterten Plattentheorie ($G_z = G$, $E_z = E$) unter Wahrung der Gleichgewichtsbedingungen von der den Verträglichkeitsbedingungen widersprechenden Annahme einer linearen bzw. parabolischen Verteilung der Spannungen σ_x, σ_y, τ_{xy}, bzw. τ_{xz}, τ_{yz} aus und leitet dann die nur im Mittel über die Plattendicke gültigen Elastizitätsgesetze mit Hilfe des *Castiglianos*chen Prinzips ab. Diese Gesetze in die Gleichgewichtsbedingungen am Plattenelement eingeführt, liefern die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} Q_x - \frac{2h^2}{5}\Delta Q_x &= -K\frac{\partial\Delta w}{\partial x} - \frac{2h^2}{5(1-\nu)}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ Q_y - \frac{2h^2}{5}\Delta Q_y &= -K\frac{\partial\Delta w}{\partial y} - \frac{2h^2}{5(1-\nu)}\frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p\,, \qquad (b)$$

aus denen sich durch Elimination der Querkräfte Q_x, Q_y folgende Bipotentialgleichung für die Durchbiegung w ergibt:

$$K\,\Delta\Delta w = p - \frac{2(2-\nu)h^2}{5(1-\nu)}\Delta p\,. \qquad (c)$$

Vernachlässigt man wie bei uns die Zusammendrückbarkeit der Platte in z-Richtung, d. h. nimmt man $E_z = \infty$ an, so gelangt man nach der Methode von *Reißner* unter Beibehaltung seiner übrigen Annahmen zu den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} Q_x - \frac{2h^2}{5}\Delta Q_x &= -K\frac{\partial\Delta w}{\partial x} - \frac{2(1+\nu)}{5(1-\nu)}h^2\frac{\partial p}{\partial x}, \\ Q_y - \frac{2h^2}{5}\Delta Q_y &= -K\frac{\partial\Delta w}{\partial y} - \frac{2(1+\nu)}{5(1-\nu)}h^2\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (a^*)$$

und schließlich mit Hilfe der unverändert bleibenden Gleichgewichtsbedingung (b) zu der Bipotentialgleichung

$$K\,\Delta\Delta w = p - \frac{4h^2}{5(1-\nu)}\Delta p\,. \qquad (c^*)$$

Da die Unterschiede zwischen (a) und (c) einerseits und (a*) und (c*) andererseits gering sind, wollen wir zum Vergleich mit unseren Ergebnissen die auf gleicher Basis ($E_z = \infty$) gewonnenen Gleichungen (a*) und (c*) heranziehen.

Diese Gleichungen kann man auch auf anderem Wege als bei *Reißner* ableiten, indem man allein mit der Annahme der parabolischen Schubspannungsverteilung, d. h. mit $f_1(z)$ nach (36) (für $p =$ konst.) die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen erfüllt, d. h. von den Gleichungen (17) und (18) ausgeht und jetzt den *Cauchy*schen Gleichgewichtsbedingungen nur im Durchschnitt genügt. Setzt man in (20) $u_0 = \frac{1+\nu}{E} Q_x$, $v_0 = \frac{1+\nu}{E} Q_y$ [siehe Gleichungen (25) oder (78)], multipliziert dann jede Gleichung mit z und integriert über z von $-h$ bis $+h$, wodurch man die Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte an einem Volumenelement $dx\,dy\,dz$ in die für Momente an einem Plattenelement $dx\,dy\,2h$ überführt, so erhält man in der Tat wieder die Gleichungen (a*), aus denen mit (b) auch die Gleichung (c*) gewonnen wurde. Diese Art der Ableitung ist aufschlußreich für den Vergleich mit unseren Ergebnissen. Wir mußten, um die *Cauchy*schen Gleichgewichtsbedingungen (20) für beliebige p exakt erfüllen zu können und sämtliche Lösungsformen zu finden, zwei mögliche Zustände der Platte unterscheiden: den Zustand der gebogenen Platte und den Zustand der eben bleibenden Platte, für die zwei grundsätzlich verschiedene Verteilungsfunktionen $f_1(z)$ gefunden wurden [siehe Gleichung (22) und (77)]. Auf diese Weise haben wir für die beiden Zustände der Platte zwei verschiedene Gleichungssysteme abgeleitet. Durch die Annahme einer einzigen Funktion $f_1(z)$ nach (36) und die durchschnittliche Erfüllung der *Cauchy*schen Gleichgewichtsbedingung ergibt sich das e i n e Gleichungssystem (a*), (c*). Um es mit unseren Ergebnissen bequemer vergleichen zu können, schreiben wir unsere Gleichungen nochmal auf.

Für die gebogene Platte haben wir in (29) bis (32) folgende Gleichungen gefunden:

$$Q_x = -K(l)\frac{\partial \Delta w}{\partial x}, \qquad Q_y = -K(l)\frac{\partial \Delta w}{\partial y}, \tag{d}$$

$$K(l)\,\Delta\Delta w = p, \tag{e}$$

$$\frac{\partial \Delta\Delta w}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2l^2}\frac{\partial \Delta w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta\Delta w}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2l^2}\frac{\partial \Delta w}{\partial y} = 0, \tag{f}$$

$$K(l) = \frac{E}{1-\nu^2}\,2l^2\left(h - l\,\mathfrak{Tg}\frac{h}{l}\right). \tag{g}$$

Unseren Gleichungen (d) und (e) entsprechen bei *Reißner* die komplizierter gebauten Gleichungen (a*) und (c*). Die Berücksichtigung der Querschubverzerrung, die sich bei *Reißner* in dem Auftreten von Korrekturgliedern mit h^2 als Faktor äußert, tritt bei uns nur dadurch in Erscheinung, daß in den Gleichungen (d) und (e) an Stelle der Biegesteifigkeit K in der klassischen Theorie die Größe $K(l) \leq K$ (Abb. 4) nach Gleichung (g) tritt. Unsere Gleichungen (f), denen bei *Reißner* nichts Äquivalentes gegenübersteht, dienen einerseits zur Berechnung der Größe l und bringen andererseits eine Einschränkung für die Auswahl der Funktionen $w(x, y)$ und $p(x, y)$. Diese Einschränkung ist aber praktisch unwesentlich, da die Klasse der zulässigen Funktionen, wie wir ausführlich besprochen haben, auch solche Funktionen umfaßt, nach denen jede Lastfunktion entwickelt werden kann und nach denen fast bei jeder praktischen Rechnung auch ohnehin entwickelt wird.

Würden wir hier die *Reißner*sche Theorie weiter verfolgen, so würden wir finden, daß sie für die nach unserer Rechnung zulässigen Lastfunktionen trotz einer gewissen Verschiedenheit der Grundgleichungen dieselben Ergebnisse wie bei uns für die Schnittkräfte liefert, wenn man auch bei *Reißner* $E_z = \infty$ setzt. Für $E_z = E$ gibt die *Reißner*sche Theorie gewisse mit ν und h^2 als Faktor versehenen Abweichungen, die aber klein sind und den Einfluß der Querzusammendrückbarkeit doch nur unvollständig berücksichtigen (siehe Einleitung). Für die Spannungen liefert unsere Theorie genauere Ergebnisse, als die von *Reißner*, der eine lineare, infolge der Schubverzerrungen streng genommen unmögliche Verteilung der Spannungen σ_x, σ_y, τ_{xy} über die Plattendicke annimmt.

Während unsere Rechnung, wie wir eben gesehen haben, für den Zustand der gebogenen Platte im wesentlichen nur eine Präzisierung der Ergebnisse der *Reißner*schen Theorie mit sich bringt, liefert sie für den Zustand der eben bleibenden Platte, d. h. für die eigentliche Erweiterung der klassischen Theorie etwas Neues. Aus den *Reißner*schen Gleichungen (a) oder (a*) erhält man für den Zustand der eben bleibenden Platte ohne Flächenbelastung

$$Q_x^{(e)} - \frac{2h^2}{5}\Delta Q_x^{(e)} = 0, \qquad Q_y^{(e)} - \frac{2h^2}{5}\Delta Q_y^{(e)} = 0 \tag{h}$$

und nach unserer (in diesem Falle auch für eine isotrope Platte exakten) Rechnung [nach (83)]

$$\left.\begin{aligned} Q_{x\mu}^{(e)} - \frac{4h^2}{\pi^2\mu^2} \Delta Q_{x\mu}^{(e)} = 0\,, \\ Q_{y\mu}^{(e)} - \frac{4h^2}{\pi^2\mu^2} \Delta Q_{y\mu}^{(e)} = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, 3, 5, \ldots) \qquad \text{(i)}$$

Für $\mu = 1$, d. h. für eine Halbwelle in der Verteilungsfunktion $f_1(z)$ nach (77) sind die Gleichungen (h) und (i) fast identisch. Die Tatsache, daß die Spannungen σ_x, σ_y, τ_{xy} nach der *Reißner*schen Annahme linear, nach unserer Rechnung sinusförmig über die Plattendicke verteilt sind, äußert sich für $\mu = 1$ nur in dem geringfügigen Unterschied zwischen den Faktoren $2/5$ und $4/\pi^2$. Nach unserer Rechnung sind aber im Falle der eben bleibenden Platte antimetrische Spannungszustände mit einer beliebigen ungeraden Anzahl von Halbwellen ($\mu = 1, 3, 5, \ldots$) in z-Richtung möglich. Wir erhalten also eine unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungsformen, wogegen die *Reißner*sche Theorie infolge der festen Annahme eines linearen Verlaufs der Spannungen σ_x, σ_y, τ_{xy} nur eine Lösungsform liefert.

Diese Lösungsformen stellen eine unendliche Mannigfaltigkeit der Gleichgewichtszustände einer eben bleibenden Platte dar, die nur an der zylindrischen Begrenzungsfläche belastet ist. Dabei sind die in der Plattenebene wirkenden Komponenten der Randkräfte nach einem Sinusgesetz [$\sin(\mu\pi z/2h)$ ($\mu = 1, 3, \ldots$), siehe Gleichung (88)], die quer zur Plattenebene wirkenden Komponenten nach einem Kosinusgesetz [$\cos(\mu\pi z/2h)$, ($\mu = 1, 3, \ldots$), siehe Gleichung (89)] verteilt. Durch Überlagerung der Verschiebungen und Spannungen der Gleichgewichtszustände der eben bleibenden Platte über die Zustandsgrößen der gebogenen belasteten und unbelasteten Platte und der *Fourier*entwicklung dieser nach den entsprechenden Kreisfunktionen $\sin(\mu\pi z/2h)$ oder $\cos(\mu\pi z/2h)$ lassen sich alle drei unabhängigen Randbedingungen in jedem Punkt der zylindrischen Begrenzungsfläche exakt erfüllen. Bei einer summarischen Erfüllung der Randbedingungen (nur für die Schnittkräfte oder Mittelwerte der Verschiebungen) sind zu den Zustandsgrößen der gebogenen Platte nur die Größen des Grundzustandes der eben bleibenden Platte ($\mu = 1$) zu überlagern. Die dabei übrig bleibenden Abweichungen von den Randwerten in den einzelnen Punkten der zylindrischen Plattenbegrenzung werden klein sein, da sich die entsprechenden Verteilungsgesetze für die gebogene und eben bleibende Platte nicht stark von einander unterscheiden. Den Gedanken, die Randbedingungen allein unter Heranziehung der Lösungen für die eben bleibende Platte mit verschiedenen Halbwellenzahlen μ in z-Richtung (z. B. $\mu = 1$ und 3) d. h. unter Umgehung der homogenen Lösung für die gebogene Platte summarisch zu erfüllen, muß man verwerfen, da hierbei wegen sehr großer Verschiedenheiten der entsprechenden Verteilungsgesetze sehr große örtliche Abweichungen von den Randwerten entstehen können.

(Eingegangen am 8. Dezember 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr.-Ing. *Alexander Kromm*, Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für technische Mechanik.

Über die Berechnung der Hypoidgetriebe.

(II. Mitteilung.)

Von P. Matthieu.

1. Einleitung. In einer kürzlich erschienenen ersten Mitteilung[1] (im folgenden mit I bezeichnet) wurde eine neue Berechnungsgrundlage für Hypoidgetriebe entwickelt und zwar zunächst unter der Voraussetzung, daß beide Achsen sich rechtwinklig kreuzen. In der vorliegenden zweiten Mitteilung wird diese letzte Voraussetzung fallen gelassen und gezeigt, daß sich die ganze Theorie ohne jede wesentliche Änderung auch auf den Fall beliebiger windschiefer Achsen ausdehnen läßt.

Die wesentlichen Ergebnisse von I sind im letzten Abschnitt jener Arbeit (Zusammenfassung) übersichtlich zusammengestellt, weshalb es wohl nicht nötig ist, hier nochmals darauf einzugehen. Alle diese Ergebnisse werden jetzt auf den Fall beliebiger windschiefer Achsen übertragen.

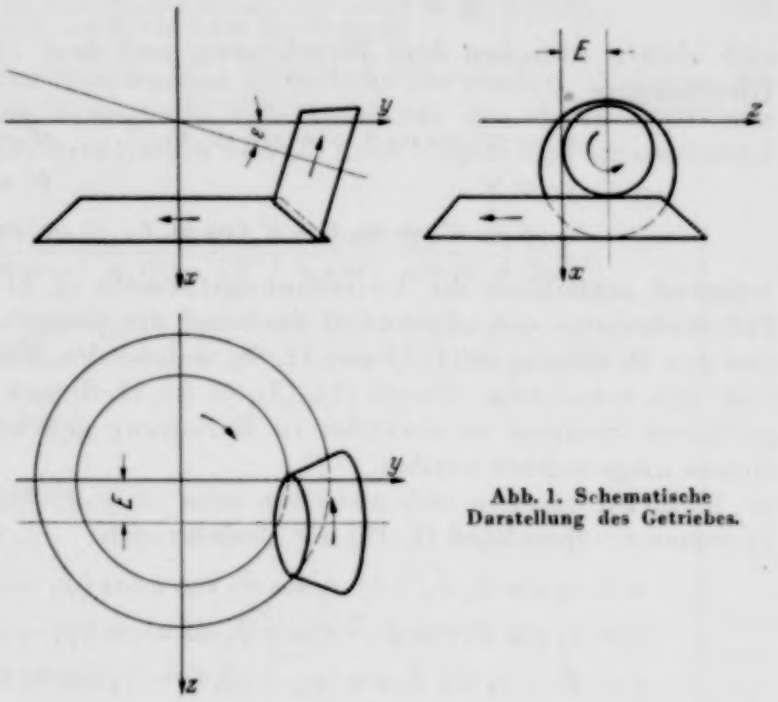

Abb. 1. Schematische Darstellung des Getriebes.

2. Aufstellung der Grundgleichungen. Wir legen das Getriebe auf die in Abb. 1 dargestellte Art in ein rechtwinkliges ruhendes Koordinatensystem mit den Koordinaten x, y, z. Es entspricht dies genau dem in I eingeschlagenen Weg. Als neue Größe tritt jetzt einzig der Winkel ε zwischen den beiden windschiefen Achsen hinzu, der auch negativ sein kann. Wie die beiden Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 und der Achsenabstand E kann auch ε beliebig gegeben sein.

Weiterhin führen wir auch jetzt wieder ein mit dem Tellerrad fest verbundenes System mit den Koordinaten x_2, y_2, z_2 ein (Abb. 2) und ebenso ein mit dem Ritzel fest verbundenes mit

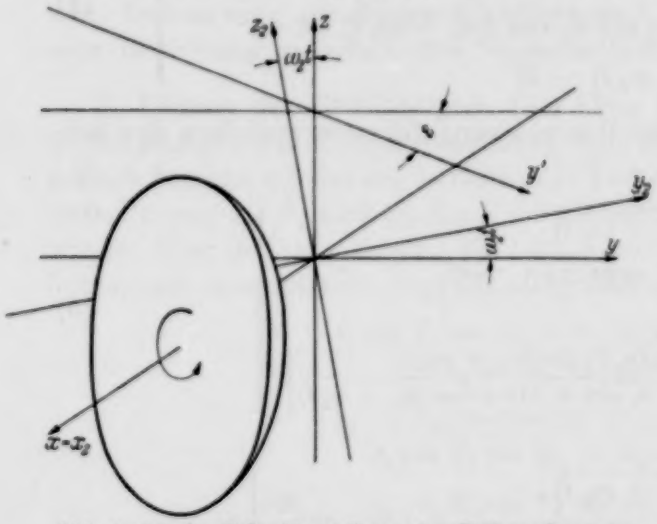

Abb. 2. Anschauliche Darstellung des Tellerradsystems.

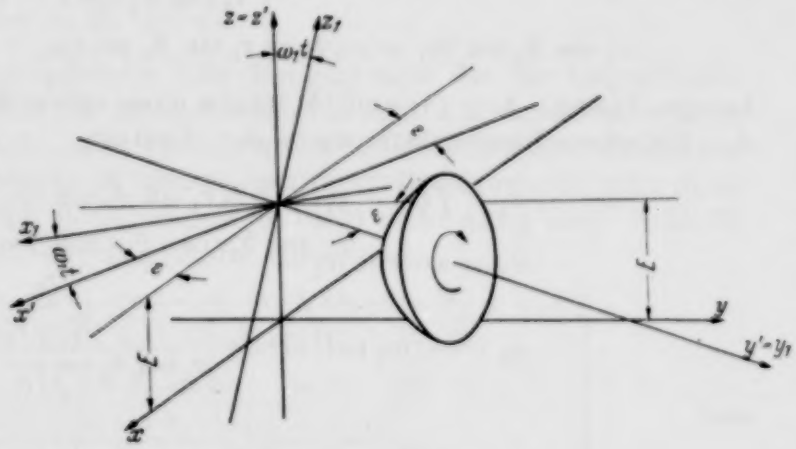

Abb. 3. Anschauliche Darstellung des Ritzelsystems.

den Koordinaten x_1, y_1, z_1 (Abb. 3). Neu kommt im jetzigen Fall noch das (x', y', z')-System hinzu (Abb. 3), das aus dem ruhenden dadurch hervorgeht, daß man dieses um den Betrag E in der z-Richtung verschiebt und nachher noch um den Winkel ε um die z-Achse dreht. Für $t = 0$

[1] *P. Matthieu*, Ing.-Archiv 21 (1953), S. 55—62.

fällt das Tellerradsystem völlig mit dem (x, y, z)-System zusammen und ebenso das Ritzelsystem mit dem (x', y', z')-System. Schließlich kann man in den beiden beweglichen Systemen auch noch Polar- und Zylinderkoordinaten einführen. Es geschieht dies wie in I, also gemäß den dortigen Abb. 4 bis 7. Alle diese Verhältnisse entsprechen genau denen in I und sind aus den jetzigen Abb. 1 bis 3 sowie aus den Abb. 4 bis 7 von I zu erkennen.

Für unsere Betrachtungen besonders wichtig sind natürlich wieder die Relativbewegungen zwischen dem Ritzel-, dem Tellerrad- und den beiden ruhenden Systemen. Wir rechnen deshalb die verschiedenen Systeme wieder aufeinander um.

Zunächst bestehen zwischen den beiden ruhenden Systemen, dem (x, y, z)- und dem (x', y', z')-System, die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\varepsilon + y' \sin\varepsilon\,, & x' &= x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon\,,\\ y &= -x' \sin\varepsilon + y' \cos\varepsilon\,, & y' &= x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon\,,\\ z &= z' + E\,, & z' &= z - E \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

und ebenso zwischen dem Ritzelsystem und dem (x', y', z')-System entsprechend (I, 1) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x' \cos\omega_1 t + z' \sin\omega_1 t\,, & x' &= x_1\cos\omega_1 t - z_1 \sin\omega_1 t\,,\\ y_1 &= y'\,, & y' &= y_1\,,\\ z_1 &= -x' \sin\omega_1 t + z' \cos\omega_1 t\,, & z' &= x_2 \sin\omega_1 t + z_1 \cos\omega_1 t\,, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

während schließlich die Umrechnungsformeln (I, 2) zwischen dem (x, y, z)-Raum und dem Tellerradsystem sich ungeändert auch auf den jetzigen Fall übertragen. Das Gleiche gilt auch von den Beziehungen (I, 8) und (I, 9), welche den Übergang zu den beiden Polarkoordinatensystemen vermitteln. Durch (1), (2), (I, 2), (I. 8) und (I, 9) sind nun die sämtlichen sechs eingeführten Systeme miteinander in Beziehung gebracht und jedes von ihnen kann auf jedes andere umgerechnet werden.

Zunächst ergeben sich zwischen dem (x, y, z)-System und den beiden Polarkoordinatensystemen entsprechend (I, 10) die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} x &= r_1 \cos\vartheta_1 \sin\varepsilon + r_1 \sin\vartheta_1 \cos\varepsilon \cos(\varphi_1 + \omega_1 t) = r_2 \cos\vartheta_2\,,\\ y &= r_1 \cos\vartheta_1 \cos\varepsilon - r_1 \sin\vartheta_1 \sin\varepsilon \cos(\varphi_1 + \omega_1 t) = r_2 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)\,,\\ z &= E + r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t) = r_2 \sin\vartheta_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t)\,, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

die sich auch durch leichte Umrechnung auf die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} r_1 \cos\vartheta_1 &= x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon = r_2 \cos\vartheta_2 \sin\varepsilon + r_2 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)\cos\varepsilon\,,\\ r_1 \sin\vartheta_1 \cos(\varphi_1 + \omega_1 t) &= x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon\\ &= r_2 \cos\vartheta_2 \cos\varepsilon - r_2 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)\sin\varepsilon\,,\\ r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t) &= r_2 \sin\vartheta_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t) - E \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

bringen lassen. Aus (3) und (4) folgen dann sofort die Umrechnungsformeln zwischen den beiden Polarkoordinatensystemen in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{E^2 + r_1^2 + 2\,E\,r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t)}\,,\\ \vartheta_2 &= \arccos\left[r_1 \frac{\cos\vartheta_1 \sin\varepsilon + \sin\vartheta_1 \cos\varepsilon \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_2}\right],\\ \varphi_2 &= -\omega_2 t + \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{E + r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_1 \cos\vartheta_1 \cos\varepsilon - r_1 \sin\vartheta_1 \sin\varepsilon \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)}\right] \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{E^2 + r^2 - 2\,E\,r_2 \sin\vartheta_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t)}\,,\\ \vartheta_1 &= \arccos\left[r_2 \frac{\cos\vartheta_2 \sin\varepsilon + \sin\vartheta_2 \cos\varepsilon \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)}{r_1}\right],\\ \varphi_1 &= -\omega_1 t + \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{-E + r_2 \sin\vartheta_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t)}{r_2 \cos\vartheta_2 \cos\varepsilon - r_2 \sin\vartheta_2 \sin\varepsilon \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Das weitere Vorgehen ist (vgl. Abschnitt 2 in I) klar vorgezeichnet. Wir nehmen wieder die

eine Zahnflanke, z. B. die des Tellerrades, in der Form

$$\varphi_2 = \Phi_2 (r_2 , \vartheta_2) \tag{7}$$

als gegeben an, ersetzen in (7) die Veränderlichen r_2, ϑ_2, φ_2 durch die Ausdrücke (5) und differentiieren schließlich die so entstehende Gleichung (welche mathematisch die sich im Ritzelraum bewegende Tellerradflanke darstellt) nach t. Die mit (7) im Eingriff stehende Ritzelflanke bestimmt sich dann im Ritzelraum wiederum als Hüllfläche der bewegten Tellerradflanke. Analytisch ergibt sie sich durch Elimination von t aus der Gleichung der bewegten Tellerradflanke und ihrer partiellen Ableitung nach t. Wie in I läßt sich auch hier der Fall, daß die Tellerradflanke in der Gestalt $\Phi^* (r_2, \vartheta_2, \varphi_2) = 0$ gegeben ist, leicht auf den obigen zurückführen. Wir halten uns deshalb im folgenden an die Darstellung (7).

Zur Durchführung dieses Programms bilden wir durch Einsetzung des dritten Wertes (5) entsprechend (I, 14) die Gleichung

$$-\omega_2 t + \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{E + r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_1 \cos\vartheta_1 \cos\varepsilon - r_1 \sin\vartheta_1 \sin\varepsilon \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)}\right] = \Phi_2 (r_2, \vartheta_2) . \tag{8}$$

Dabei sind zur Abkürzung die ersten beiden Beziehungen (5) beibehalten worden. Gleichung (8) stellt nun also die im Ritzelsystem sich bewegende Tellerradflanke dar, deren Hüllfläche die Gegenflanke ist. Durch die partielle Differentiation von (8) nach t ergibt sich entsprechend (I, 16) die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}
&-\omega_2 + \omega_1 \frac{[r_1 \cos\vartheta_1 \cos\varepsilon - r_1 \sin\vartheta_1 \sin\varepsilon \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)]\, r_1 \sin\vartheta_1 \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)}{[r_1 \cos\vartheta_1 \cos\varepsilon - r_1 \sin\vartheta_1 \sin\varepsilon \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)]^2 + [E + r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t)]^2} \\
&\quad - \omega_1 \frac{[E + r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t)]\, r_1 \sin\vartheta_1 \sin\varepsilon \sin(\varphi_1 + \omega_1 t)}{[r_1 \cos\vartheta_1 \cos\varepsilon - r_1 \sin\vartheta_1 \sin\varepsilon \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)]^2 + [E + r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t)]^2} \\
&\quad = \frac{\partial\Phi_2}{\partial r_2}(r_2 , \vartheta_2)\frac{\partial r_2}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2 , \vartheta_2)\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t} \\
&\quad = \omega_1 \frac{\partial\Phi_2}{\partial r_2}(r_2 , \vartheta_2)\frac{E\, r_1 \sin\vartheta_1 \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_2} \\
&\quad + \omega_1 \frac{\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2, \vartheta_2)}{\sqrt{1 - \dfrac{r_1^2}{r_2^2}[\cos\vartheta_1 \sin\varepsilon + \sin\vartheta_1 \cos\varepsilon \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)]^2}}\left[\frac{r_1}{r_2}\sin\vartheta_1 \cos\varepsilon \sin(\varphi_1 + \omega_1 t)\right. \\
&\quad \left. + \frac{r_1^2 [\cos\vartheta_1 \sin\varepsilon + \sin\vartheta_1 \cos\varepsilon \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)]\, E \sin\vartheta_1 \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_2^3}\right] .
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Diese stellt in Verbindung mit (8) und den ersten beiden Formeln (5) die gesuchte Gegenflanke dar. Indem man aus diesen Gleichungen t, r_2 und ϑ_2 eliminiert, erhält man für die Gegenflanke eine Beziehung zwischen den Veränderlichen r_1, ϑ_1 und φ_1.

3. Lösung der Gleichungen. Das eben hergeleitete Gleichungssystem für die Gegenflanke ist im jetzigen Falle noch wesentlich komplizierter als bei rechtwinklig sich kreuzenden Achsen; jedoch besteht wieder die auffallende Tatsache, daß es sich wesentlich vereinfacht, wenn man anstelle von r_1, ϑ_1 und φ_1 die Veränderlichen r_2, ϑ_2 und φ_2 einführt. Gleichung (8) geht dann wieder über in (7), während die ersten beiden Beziehungen (5) nicht mehr nötig sind. Schließlich erhält man anstelle von (9) aufgrund von (3) und (4) die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{r_2 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)\,[r_2 \cos\vartheta_2 \cos\varepsilon - r_2 \sin\vartheta_2 \sin\varepsilon \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)}{[r_2 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)]^2 + [r_2 \sin\vartheta_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t)]^2} \\
&\quad - \frac{r_2 \sin\vartheta_2 \sin\varepsilon \sin(\varphi_2 + \omega_2 t)\,[r_2 \sin\vartheta_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t) - E]}{[r_2 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)]^2 + [r_2 \sin\vartheta_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t)]^2} \\
&= \frac{\partial\Phi_2}{\partial r_2}(r_2, \vartheta_2)\frac{r_2 E\,[\cos\vartheta_2 \cos\varepsilon - \sin\vartheta_2 \sin\varepsilon \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)]}{r_2} \\
&\quad + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2, \vartheta_2)\frac{1}{\sin\vartheta_2}\left[\frac{[r_2 \sin\vartheta_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t) - E]\cos\varepsilon}{r_2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{r_2^2 \cos\vartheta_2\, E\,[\cos\vartheta_2 \cos\varepsilon - \sin\vartheta_2 \sin\varepsilon \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)]}{r_2^3}\right] .
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Diese läßt sich noch in leicht ersichtlicher Weise vereinfachen, und man erhält dann für die Ritzelflanken die beiden Gleichungen

$$\varphi_2 = \Phi_2(r_2, \vartheta_2) \tag{11}$$

und

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\omega_2}{\omega_1} - \sin\varepsilon + \operatorname{ctg}\vartheta_2 \cos\varepsilon\cos(\varphi_2 + \omega_2 t) + \frac{E\sin(\varphi_2+\omega_2 t)\sin\varepsilon}{r_2\sin\vartheta_2} \\ &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial r_2}(r_2,\vartheta_2)\left[E\cos\vartheta_2\cos\varepsilon - E\sin\vartheta_2\cos(\varphi_2+\omega_2 t)\sin\varepsilon\right] + \\ &\quad + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2,\vartheta_2)\left[\cos\varepsilon\sin(\varphi_2+\omega_2 t) - \frac{E\cos\varepsilon\sin\vartheta_2}{r_2} - \frac{E\cos\vartheta_2\sin\varepsilon\cos(\varphi_2+\omega_2 t)}{r_2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Diese entsprechen genau den beiden Gleichungen (I, 18) und (I, 19). Sie sind gleich gebaut und haben die gleiche Bedeutung, indem jedes System der vier Größen r_2, ϑ_2, φ_2, t, das (11) und (12) genügt (im Tellerradsystem) einen Punkt der Ritzelflanke darstellt, nämlich einen Raumpunkt des Tellerradsystems und die Zeit, zu welcher dieser in die Ritzelflanke fällt. Natürlich kann man von hier gemäß (6) wieder zum Ritzelsystem übergehen. Wenn man diese Gleichungen nochmals in der Form

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{E^2 + r_2^2 - 2\,E\,r_2\sin\vartheta_2\sin(\varphi_2+\omega_2 t)}\,, \\ \cos\vartheta_1 &= \frac{r_2}{r_1}\left[\cos\vartheta_2\sin\varepsilon + \sin\vartheta_2\cos\varepsilon\cos(\varphi_2+\omega_2 t)\right], \\ \operatorname{tg}(\varphi_1+\omega_1 t) &= \frac{r_2\sin\vartheta_2\sin(\varphi_2+\omega_2 t) - E}{r_2\cos\vartheta_2\cos\varepsilon - r_2\sin\vartheta_2\sin\varepsilon\cos(\varphi_2+\omega_2 t)} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

anschreibt, so stellen (11) bis (13) implizite eine Beziehung von der Form

$$\varphi_1 = \Phi_1(r_1, \vartheta_1) \tag{14}$$

dar, welche sich durch Elimination von r_2, ϑ_2, φ_2 und t aus (11) bis (13) ergibt.

Die Gleichungen (11) bis (14) haben nun vollständig dieselbe Bedeutung wie die Gleichungen (I, 18) bis (I, 21). Damit zwei Zahnflanken miteinander im Linieneingriff stehen, ist notwendig und hinreichend, daß die zugehörigen Gleichungen (11) und (14) sich vermöge (12) und (13) ineinander überführen lassen. Auch die unter a) bis e) auf Seite 60 in I besprochenen Anwendungsmöglichkeiten der Grundgleichungen übertragen sich ohne jegliche Änderung auf den jetzigen Fall, so daß wir hier nicht mehr näher darüber eintreten. Als wichtigste Anwendung ergibt sich insbesondere, daß sich auch jetzt die Zeit nach (12) im wesentlichen gemäß einer quadratischen Gleichung aus den übrigen Größen dieser Gleichung ergibt. Die unter b) (Seite 60 in I) angegebene Parameterdarstellung für die Gegenflanke in geschlossener Form läßt sich also auch auf den Fall beliebiger windschiefer Achsen übertragen.

Weiterhin behalten auch die in I angestellten geometrischen Betrachtungen ihre Gültigkeit bei. Wieder ist t der Zeitpunkt, zu welchem der durch r_2, ϑ_2, φ_2 gegebene Punkt der Tellerradflanke die Gegenflanke berührt, und der gemäß (13) resultierende Punkt der Ritzelflanke ist der Gegenpunkt. Die genannte Parameterdarstellung in endlicher Form läuft also auch hier darauf hinaus, daß man zu einem beliebig gegebenen Punkt der Tellerradflanke zunächst (im wesentlichen durch Auflösung einer quadratischen Gleichung) den Zeitpunkt berechnet, in welchem er seinen Gegenpunkt berührt und dann die Koordinaten des Gegenpunktes selbst berechnet.

Schließlich kann man anstelle von Polarkoordinaten auch noch Zylinderkoordinaten einführen (vgl. dazu Abb. 6 und 7 in I). Entsprechend (I, 22) bis (I, 25) erhält man dann die Grundgleichungen in der Form

$$\varphi_2 = \Psi_2(\varrho_2, x_2), \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} &\cos(\varphi_2+\omega_2 t)\left[\cos\varepsilon\frac{x_2}{\varrho_2} + E\sin\varepsilon\frac{\partial\Psi_2}{\partial\varrho_2}(\varrho_2, x_2)\right] \\ &\quad + \sin(\varphi_2+\omega_2 t)\left[\frac{E\sin\varepsilon}{\varrho_2} + \varrho_2\cos\varepsilon\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2}(\varrho_2, x_2) - x_2\cos\varepsilon\frac{\partial\Psi_2}{\partial\varrho_2}(\varrho_2, x_2)\right] \\ &\quad = \frac{\omega_2}{\omega_1} + \sin\varepsilon + E\cos\varepsilon\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2}(\varrho_2, x_2), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_2 \sin\varepsilon + \varrho_2 \cos\varepsilon \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)\,, \\ \varrho_1 &= \sqrt{[x_2\cos\varepsilon - \varrho_2 \sin\varepsilon \cos(\varphi_2+\omega_2 t)]^2 + [E - \varrho_2 \sin(\varphi_2+\omega_2 t)]^2}\,, \\ \operatorname{tg}(\varphi_1+\omega_1 t) &= \frac{\varrho_2 \sin(\varphi_2+\omega_2 t) - E}{-\varrho_2 \sin\varepsilon\cos(\varphi_2+\omega_2 t) + x_2\cos\varepsilon}\,, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\varphi_1 = \Psi_1(\varrho_1, y_1)\,. \tag{18}$$

Diese sind sogar eher etwas einfacher als die entsprechenden Gleichungen (11) bis (14) in Polarkoordinaten.

4. Bemerkungen zur numerischen Berechnung der Gegenflanke. Auch diese Betrachtungen können sozusagen unverändert aus I übernommen werden. Entsprechend (I, 26) lösen wir jetzt Gleichung (12) nach $\cos(\varphi_2+\omega_2 t)$ auf und erhalten

$$\left.\begin{aligned} &\cos(\varphi_2+\omega_2 t)\left[\operatorname{ctg}\vartheta_2\cos\varepsilon + E\sin\varepsilon\sin\vartheta_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial r_2}(r_2,\vartheta_2) + \frac{E\sin\varepsilon\cos\vartheta_2}{r_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2,\vartheta_2)\right] \\ &= \sin(\varphi_2+\omega_2 t)\left[-\frac{E\sin\varepsilon}{r_2\sin\vartheta_2} + \cos\varepsilon\frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2,\vartheta_2)\right] + \frac{\omega_2}{\omega_1} + \sin\varepsilon \\ &\qquad + E\cos\varepsilon\cos\vartheta_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial r_2}(r_2,\vartheta_2) - \frac{E\cos\varepsilon\sin\vartheta_2}{r_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2,\vartheta_2)\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Wenn wir hier anstelle der letzten beiden Gleichungen (I, 27) die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{-\dfrac{E\sin\varepsilon}{r_2\sin\vartheta_2} + \cos\varepsilon\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2,\vartheta_2)}{\operatorname{cotg}\vartheta_2\cos\varepsilon + E\sin\varepsilon\sin\vartheta_2\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial r_2}(r_2,\vartheta_2) + \dfrac{E\sin\varepsilon\cos\vartheta_2}{r_2}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2,\vartheta_2)}\,, \\ B &= \frac{\dfrac{\omega_2}{\omega_1} + \sin\varepsilon + E\cos\varepsilon\cos\vartheta_2\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial r_2}(r_2,\vartheta_2) - \dfrac{E\cos\varepsilon\sin\vartheta_2}{r_2}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2,\vartheta_2)}{\operatorname{ctg}\vartheta_2\cos\varepsilon + E\sin\varepsilon\sin\vartheta_2\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial r_2}(r_2,\vartheta_2) + \dfrac{E\sin\varepsilon\cos\vartheta_2}{r_2}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2,\vartheta_2)} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

einführen, so behalten alle Überlegungen von Abschnitt 4 in I unverändert ihre Gültigkeit bei. Aus einem beliebigen Punkt $P(r_2^*, \vartheta_2^*, \varphi_2^*)$ der Tellerradflanke mit $\varphi_2^* = \Phi_2(r_2^*, \vartheta_2^*)$ können wieder nach demselben Rechenschema zunächst die zugehörigen Größen u^* und t^* und aus diesen dann weiterhin der Gegenpunkt $Q(r_1^*, \vartheta_1^*, \varphi_1^*)$ berechnet werden. Abgesehen davon, daß im jetzigen Fall die Größen A und B etwas komplizierter zu berechnen sind, lassen sich also die in I angestellten Betrachtungen unverändert auch auf den Fall beliebiger windschiefer Achsen ausdehnen. Im übrigen sei auf Abschnitt 4 in I verwiesen.

5. Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die Berechnungsmethoden für Hypoidgetriebe, die in I für den Fall von rechtwinklig sich kreuzenden Achsen aufgestellt wurden, ohne jede wesentliche Änderung auch auf den allgemeinsten Fall beliebiger windschiefer Achsen ausgedehnt werden können. Insbesondere läßt sich auch jetzt die Gegenflanke aus der gegebenen Flanke gemäß der Parameterdarstellung (11) bis (13) in geschlossener Form berechnen, und es gelten alle im Anschluß an diese Darstellung angestellten Betrachtungen.

(Eingegangen am 9. Dezember 1952.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *P. Matthieu*, Berlin-Charlottenburg 2, Jebensstr. 1.

Indirekte Bestimmung von Lüfterkennlinien und Anwendungen auf die Bestimmung des natürlichen Auftriebs einer Grube*.

Von W. Richter.

1. Aufgabenstellung. Der natürliche Auftrieb einer Grube beeinflußt stark die Bewetterung der Grube. Sein Wert kann aus wettertechnischen Messungen bestimmt werden, die alle Wetterwege des gesamten Wettersystems erfassen müssen. Aus dem Verknüpfen dieser zahlreichen Einzelwerte können erhebliche Ungenauigkeiten für den Wert des aus ihnen abgeleiteten natürlichen Auftriebs folgen. Dazu kommt noch, daß der Bewetterungszustand der Grube während des langen für diese Meßreihen erforderlichen Zeitraums völlig unverändert bleiben müßte, was mit Rücksicht auf den Grubenbetrieb streng genommen unmöglich ist. Diese beiden Umstände begründen den Wunsch nach einem Verfahren, das den Wert des natürlichen Auftriebs zu bestimmen gestattet, ohne daß die Ergebnisse zahlreicher Einzelmessungen zusammengefaßt werden müssen, und welches nur einen so knappen Zeitaufwand für die damit verbundenen Messungen erfordert, daß der Grubenbetrieb den Bewetterungszustand möglichst nicht verändert.

Der natürliche Auftrieb erhöht die Energie des Wetterstroms und hat daher dieselbe Wirkung wie ein mit dem Hauptgrubenlüfter in Serie geschalteter Zubringelüfter, von dem er sich nur dadurch unterscheidet, daß diese Energieerhöhung des Wetterstroms nicht in einer örtlich eng begrenzten Zone sondern entlang weiter Strecken (Abbaue, tiefe Sohlen usw.) geschieht. Es liegt daher nahe, eine indirekte Bestimmung des natürlichen Auftriebs aus Messungen am Hauptgrubenlüfter herzuleiten.

Diese Aufgabe ist ein Sonderfall einer allgemeineren Fragestellung, bei welcher auf Grund der gegenseitigen Beeinflussung zweier im selben Widerstandsystem arbeitender Lüfter aus Messungen an einem von ihnen auf die Kennlinie des zweiten geschlossen werden soll. Auch diese Verallgemeinerung hat gelegentlich praktische Bedeutung. Wenn z.B. die beiden Lüfter von verschiedenen Herstellerfirmen stammen und es einer von diesen gestattet wird, wohl ihren aber nicht den fremden Lüfter im Betrieb zu messen, dann kann die dabei indirekt bestimmte Kennlinie des fremden Lüfters eine genauere Beurteilung des ganzen Systems ermöglichen. Gelegentlich wird auch die Tatsache, daß eine Lüfteruntersuchung den Betrieb stört, eine möglichst geringe Dauer dieser Störung als wünschenswert erscheinen lassen, und man wird es deshalb begrüßen, wenn Messungen an einem Lüfter gleichzeitig Aussagen über einen zweiten Lüfter ergeben.

In einem überall dichten Leitungssystem, in welchem dem strömenden Mittel keine Energie zugeführt wird, und welches deshalb passives System genannt werden soll, besteht zwischen dem Förderstrom x und dem Gesamtdruckverlust η bei einer stationären, turbulenten Strömung die Beziehung

$$\eta = R\,x^n\,, \tag{1}$$

worin R eine das System kennzeichnende und vom strömenden Mittel abhängige Konstante bedeutet, und der konstante Exponent n wenig von 2 verschieden ist. Für diesen Exponenten n hat *W. Schmidt* [1] aus Luttenuntersuchungen den Durchschnittswert 1,83 ermittelt. Im Folgenden soll dieser konstante Exponent n als bekannt vorausgesetzt werden und zwar soll für ihn der Wert 2 angenommen werden. Das ist jedoch keine Einschränkung. Die Untersuchung gilt auch für jeden anderen Wert dieses konstanten Exponenten n. Sodann ist

$$\eta' = \frac{d\eta}{dx} = n\,R\,x^{n-1} = n\,\frac{\eta}{x} \tag{2}$$

die Differentialgleichung der durch (1) dargestellten einparametrigen Kurvenschar. Jedem Wert der Konstanten R entspricht in dieser Kurvenschar eine bestimmte Kurve, die Systemkennlinie heißen soll (Abb. 1).

---

* Über einen Teil der hier gegebenen Entwicklungen wurde auf der Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik im Juni 1952 in Braunschweig berichtet.

[1] *W. Schmidt*, Bergbau-Rundschau 3 (1951), S. 100.

Schließt man an das passive System einen Lüfter mit der Kennlinie

$$y = f(x) \tag{3}$$

an, wobei y die vom Lüfter erzeugte Gesamtdruckerhöhung bedeutet, so folgt aus $\eta = y$ der Förderstrom x des Betriebspunktes P.

Wenn der Lüfter regelbar ist, so erhält man anstatt einer einzigen Kennlinie (3) das Kennlinienfeld

$$y = f_i(x)\,. \tag{3a}$$

Jeder festen Einstellung der Regelvorrichtung (z. B. jeder bestimmten Drehzahl bei drehzahlregelbaren Lüftern, jeder bestimmten Schaufeleinstellung bei Lüftern mit verstellbaren Lauf- oder Leitschaufeln) entspricht im Kennlinienfeld (3a) eine ganz bestimmte Kennlinie, auf der $\eta = y$ einen Betriebspunkt festlegt. Die Gesamtheit dieser Betriebspunkte, welche sich für ein bestimmtes passives System im Kennlinienfeld (3a) ergeben, bildet die Systemkennlinie, die auch auf diese Weise experimentell ermittelt werden könnte. Ist die Größe des konstanten Exponenten n in (1) bekannt, dann genügt zur Bestimmung der Konstanten R ein einziger Betriebspunkt. Falls man auch den Exponenten n nicht kennt, so benötigt man zwei Betriebspunkte, die auch unendlich benachbart sein dürfen (Punkt mit seiner Tangente), für die Ermittlung der Systemkennlinie (1).

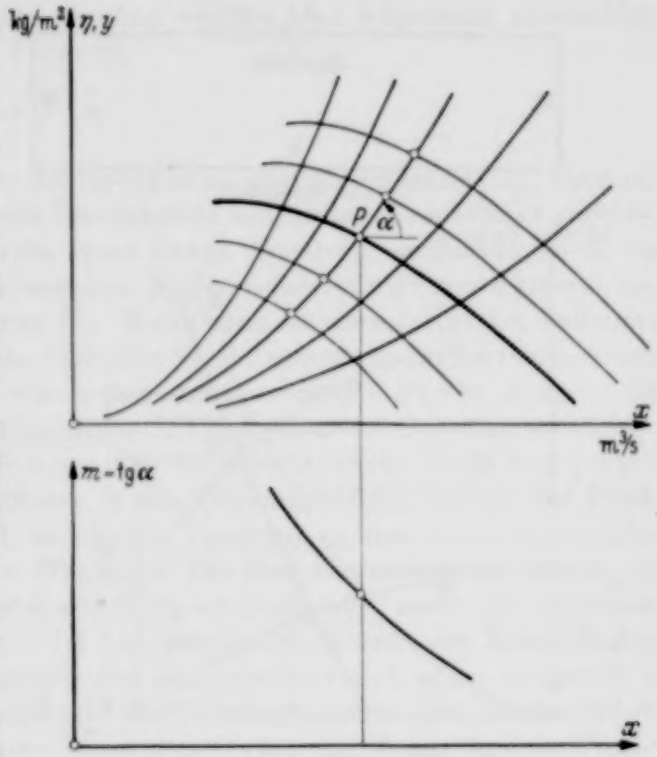

Abb. 1. Lüfter- und Systemkennlinien.

Wenn der Lüfter nur in einem engen Bereich regelbar ist, so daß man vom Kennlinienfeld (3a) nur jene in unmittelbarer Umgebung von (3) liegenden Kennlinien erhält, so kann auch die Systemkennlinie (1) nur in unmittelbarer Umgebung eines auf (3) liegenden Betriebspunktes experimentell bestimmt werden. Es kann also nur das Linienelement des auf der Kennline (3) liegenden Betriebspunktes der Systemkennlinie (1) ermittelt werden, für welches

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \eta' = n\frac{y}{x} = n\frac{f(x)}{x} \tag{4}$$

ist. Ändert sich das passive System, so ändert sich auch der Wert von m. Für die durch (2) dargestellte Gesamtheit aller möglichen passiven Systeme ist (4) eine Funktion von x. Diese Funktion

$$m = g(x) \tag{5}$$

kann experimentell bestimmt werden, wenn der Lüfter in der Umgebung seiner Kennlinie (3) regelbar ist, und wenn etwa durch Drosselungen im passiven System (1) die durch (2) angegebene Schar von Systemkennlinien erhalten werden kann. Ergibt sich dabei, daß $g(x) \neq n f(x)/x$ ist, so ist das eine hinreichende (allerdings nicht notwendige) Bedingung dafür, daß dem strömenden Mittel im Leitungssystem Energie zugeführt wird. Das Leitungssystem soll in diesem Falle aktives System genannt werden.

Im Folgenden soll untersucht werden, welche Aussagen über die Art der Energiezufuhr an das im Leitungssystem strömende Mittel gemacht werden können, wenn die Funktionen (3) und (5) gegeben sind. Geschieht die Energiezufuhr an das im Leitungssystem strömende Mittel durch einen dort arbeitenden Lüfter, so heißt das also, es soll die Kennlinie

$$y = F(x) \tag{6}$$

dieses Lüfters bestimmt werden. Diese Aufgabe soll indirekte Lüfterkennlinienbestimmung genannt werden.

2. Vollständige Hintereinanderschaltung. Der Lüfter mit der Kennlinie (3) soll Hauptlüfter heißen, der Lüfter, dessen Kennlinie (6) ist, werde Zubringelüfter genannt. Vollkommene Hintereinanderschaltung liegt dann vor, wenn der gesamte durch das Leitungs-

system fließende Förderstrom sowohl vom Zubringelüfter als auch vom Hauptlüfter gefördert wird (Abb. 2).

Wenn man sich vorstellt, daß die vom Zubringelüfter erzeugte Gesamtdruckerhöhung von der Fördermenge unabhängig, also konstant gleich P ist, so wird der Teil P des durch (1) dargestellten Gesamtdruckverlustes im Leitungssystem vom Zubringelüfter ausgeglichen. Man kann

$$\eta^* = R\,x^n - P \tag{7}$$

als die auf den Hauptlüfter bezogene Widerstandslinie des Systems, welches aus dem Leitungssystem mit dem in ihm arbeitenden Zubringelüfter besteht, bezeichnen. Ist der Wert des Exponenten n bekannt, so genügen zwei Betriebspunkte, um aus ihnen die Größen R (kennzeichnend für das Leitungssystem) und P (zur Mengenachse parallele Kennlinie des Zubringelüfters) zu bestimmen. Diese zwei erforderlichen Betriebspunkte können auch unendlich benachbart sein, also durch einen Betriebspunkt und seine Tangente an die durch ihn gehende auf den Hauptlüfter bezogene Widerstandslinie des Systems gegeben sein.

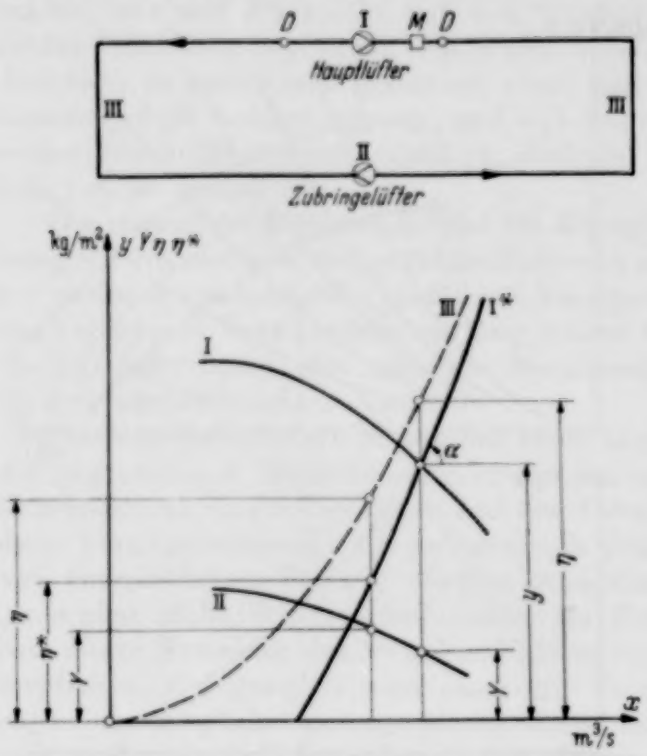

Abb. 2. Vollständige Hintereinanderschaltung zweier Lüfter. D = Druckmeßstellen. M = Mengenmeßstelle.

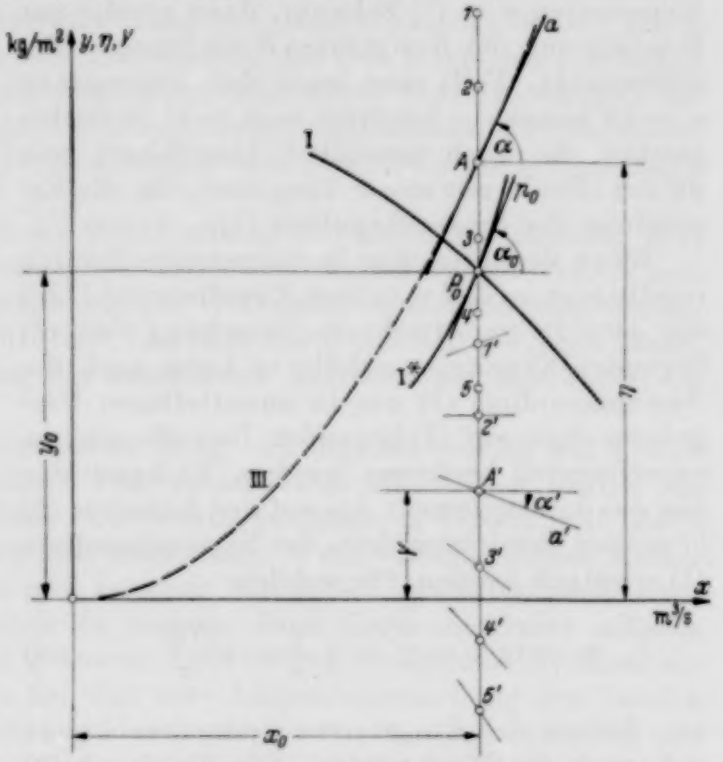

Abb. 2a. Vollständige Hintereinanderschaltung zweier Lüfter: Richtungsfeld für Kennlinien des Zubringelüfters.

Wenn die vom Zubringelüfter erzeugte Gesamtdruckerhöhung nicht konstant ist, aber ihre Abhängigkeit von der Fördermenge x, wie das bei vielen Lüftern zumindest in einem gewissen Fördermengenbereich recht gut angenähert gilt, in der Form

$$P = K\,x^2 + B\,x + C \tag{6a}$$

vorausgesetzt werden kann, dann ist die Kennlinie des Zubringelüfters eine Parabel mit zur Druckachse paralleler Parabelachse.

Die auf den Hauptlüfter bezogene Widerstandslinie des Systems hat dann die Gleichung

$$\eta^* = R\,x^n - K\,x^2 - B\,x - C\,. \tag{7a}$$

Ist der Exponent n bekannt, so genügen für $n \neq 2$ vier Betriebspunkte derselben auf den Hauptlüfter bezogenen Widerstandslinie des Systems zur Bestimmung der Konstanten. Ist jedoch $n = 2$, dann ist die Aufgabe nur dann eindeutig lösbar, wenn z. B. für eine bestimmte Fördermenge x_0 die Gesamtdruckerhöhung P_0 des Zubringelüfters, also ein Betriebspunkt dieses Lüfters, bekannt ist. Man braucht dann nur drei Betriebspunkte derselben auf den Hauptlüfter bezogenen Widerstandslinie des Systems.

Für $n \neq 2$ können zur Lösung der Aufgabe verwendet werden entweder 4 Punkte auf einer auf den Hauptlüfter bezogenen Widerstandslinie des Systems, oder 3 Punkte auf einer und 2 Punkte auf einer anderen auf den Hauptlüfter bezogenen Widerstandslinie des Systems, oder je 2 Punkte auf 3 auf den Hauptlüfter bezogenen Widerstandslinien des Systems. Wieder

können je 2 Punkte auf derselben auf den Hauptlüfter bezogenen Widerstandslinie des Systems unendlich benachbart sein (Linienelement). Es genügt also bei einem in einem beschränkter Bereich regelbaren Hauptlüfter durch drei verschiedene Drosseleinstellungen im Leitungssystem je ein solches Linienelement von 3 auf den Hauptlüfter bezogenen Widerstandslinien des Systemes zu bestimmen.

Für $n = 2$ können außer den Werten des Betriebspunktes (x_0, P_0) zur Lösung der Aufgabe entweder verwendet werden 3 Punkte auf einer auf den Hauptlüfter bezogenen Widerstandslinie des Systems oder je 2 Punkte auf 2 auf den Hauptlüfter bezogenen Widerstandslinien des Systems. Auch hier können je 2 Punkte auf derselben auf den Hauptlüfter bezogenen Widerstandslinie des Systems unendlich benachbart sein (Linienelement). Es genügen demnach 2 verschiedene Drosselstellungen im Leitungssystem.

Die Kennlinie eines Zubringelüfters kann aber nicht in ihrem ganzen Verlauf hinreichend genau durch eine Parabel (6a)

$$P = K x^2 + B x + C$$

dargestellt werden. Es soll deshalb ein Verfahren gegeben werden, das allgemein anwendbar ist, wenn die Kennlinie des Zubringelüfters die Form (6)

$$P = y = F(x)$$

hat.

Auf der Kennlinie *I* des Hauptlüfters sei der Betriebspunkt P_0 (Fördermenge x_0, Gesamtdruckerhöhung y_0) gemessen (Abb. 2a). Wenn der Hauptlüfter zumindest beschränkt regelbar ist, so erhält man, ohne daß das Leitungssystem etwa durch Drosseln verändert wird, aus Messungen ein Stück der auf den Hauptlüfter bezogenen Widerstandslinie I^* des Systems und damit die zu P_0 gehörende Tangente p_0 der Kurve I^*. Wenn man annimmt, daß im Leitungssystem kein Zubringelüfter arbeitet und in diesem Falle der Fördermenge x_0 im Leitungssystem der Gesamtdruckverlust η entspricht, so kann durch den entsprechenden Punkt $A(x_0, \eta)$ bei bekanntem Exponenten n nach (1) die Widerstandslinie *III* des passiven Systems gezeichnet werden, deren Tangente im Punkte A die Gerade a ist. Für diese willkürliche Wahl von η ergibt sich aber aus $\eta - Y = y_0$ die Gesamtdruckerhöhung Y des Zubringelüfters, womit der Punkt $A'(x_0, Y)$ gefunden ist. α_0 bzw. α sei der Winkel, welche die Tangente p_0 bzw. a mit der x-Achse einschließt. Aus $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_0 = \operatorname{tg}\alpha'$ folgt der Winkel α' für das Linienelement durch den Punkt A'. Wenn daher *III* die Widerstandslinie des Leitungssystems wäre unter der Annahme, daß kein Zubringelüfter vorhanden wäre, dann ist (A', a') das Linienelement der Kennlinie des Zubringelüfters, sobald $P_0(x_0, y_0)$ der Betriebspunkt des Hauptlüfters und p_0 die Tangente an die auf den Hauptlüfter bezogene Widerstandslinie I^* des Leitungssystems im Punkte P_0 ist. Geometrisch heißt das, daß bei bekanntem Exponenten von (1) für die Menge x_0 dem Punkte $A(x_0, \eta)$ eindeutig ein Linienelement $A'(x_0, Y)$, a' zugeordnet ist. Abb. 2a zeigt zu einigen Punkten $i(x_0, \eta_i)$ die ihnen so zugeordneten Punkte $i'(x_0, Y_i)$ und deren Linienelemente $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Wird nun diese Zuordnung für jedes x_0 durchgeführt, was möglich ist, sobald man die Funktion $\operatorname{tg}(\alpha) = g(x)$ kennt, so erhält man in der ganzen (x, Y)-Ebene zu jedem Punkte (x, Y) das entsprechende Linienelement also ein Richtungsfeld, das ist aber die geometrische Deutung einer Differentialgleichung erster Ordnung, zu deren Lösungskurven die zu bestimmende Kennlinie des Zubringelüfters gehört. Diese Differentialgleichung soll hergeleitet werden.

Die Summe der Gesamtdruckerhöhungen durch zwei hintereinandergeschaltete Lüfter muß dem Gesamtdruckverlust im passiven System *III* gleich sein (Abb. 2). Aus $Y + y = \eta$ folgt

$$\eta' = 2\frac{\eta}{x} = 2\frac{Y + y}{x} = 2\frac{Y + f(x)}{x}. \tag{2a}$$

Die auf den Hauptlüfter *I* bezogene Widerstandslinie I^* des Systems ergibt sich aus der Kennlinie *II* des Zubringelüfters und der Kennlinie *III* des passiven Systems nach $\eta^* = \eta - Y$. Nach x abgeleitet erhält man

$$(\eta^*)' = g(x) = \eta' - Y'$$

und daher wegen (2a) die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$Y' - \frac{2}{x} Y + g(x) - \frac{2}{x} f(x) = 0. \tag{8}$$

Für eine graphische Lösung dieser Differentialgleichung kann eine Leitkurve[1] L mit der Parameterdarstellung

$$x_L = \frac{x}{2}, \qquad y_L = \frac{x}{2} g(x) - f(x) \tag{9}$$

verwendet werden, deren Punkte mit den Werten von x zu beziffern sind. Unter den Lösungskurven der Differentialgleichung (8) befindet sich die gesuchte Kennlinie des Zubringelüfters. Ist einer von deren Punkten (z. B. aus Angaben auf dem Lüfterkennschild der Lieferfirma) bekannt, so kann die Kennlinie eindeutig bestimmt werden.

Eine rechnerische Näherungslösung kann man aus der Tatsache herleiten, daß die Kennlinie eines Lüfters im normalen Lüfterarbeitsbereich gut durch eine Parabel

$$y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \tag{3b}$$

angenähert werden kann. Nur wenn die Funktion (5) die Form

$$m = \frac{2}{x} f(x) + B + \frac{2\,C}{x} \tag{5a}$$

hat, hier also

$$m = 2\,a\,x + B + 2\,b + \frac{2\,(C + c)}{x}$$

ist, erhält man auch für die Kennlinie des Zubringelüfters wieder eine Parabel

$$Y = K\,x^2 + B\,x + C\,. \tag{6a}$$

Die Leitkurve L ist dann eine Gerade $y_L = B\,x_L + C$, deren Punkte mit den Werten von x entsprechend der Parameterdarstellung

$$x_L = \frac{x}{2}, \qquad y = \frac{B}{2} x + C \tag{9a}$$

zu beziffern sind. Alle Lösungsparabeln (6a) gehen durch den Punkt $x = 0$, $y = C$ und berühren in ihm die Leitgerade (9a). Die Parabelscheitel haben die Koordinaten $x_s = -B/2\,k$, $y_s = C - B^2/4\,k$ und liegen auf der Geraden $y_s = \frac{1}{2}\,B\,x_s + C$.

Die Leitgerade L wird speziell zur Mengenachse parallel, wenn $B = 0$ ist. Die Funktion (5) muß dann die Form

$$m = \frac{2}{x}(y + C) \tag{5b}$$

haben. Alle Lösungsparabeln haben die gemeinsame, zur Mengenachse parallele Scheiteltangente $y = C$ und diese ist selbst Lösungskurve.

3. Beispiel: Natürlicher Auftrieb bei der Grubenbewetterung. Die Aufgabe, die Größe des natürlichen Auftriebs einer Grube zu ermitteln, ist ein Sonderfall der unter „vollständige Hintereinanderschaltung" besprochenen, falls der natürliche Auftrieb auf die gesamte vom Hauptlüfter geförderte Wettermenge wirkt. Wenn wie gelegentlich in der Literatur für Wettermengen innerhalb eines bestimmten Bereiches angenommen wird, daß der natürliche Auftrieb konstant, also von der Wettermenge unabhängig ist, was sicher nicht richtig ist[2], so ist $B = 0$. Wird auf Grund von Messungen am Hauptlüfter festgestellt, daß die Beziehung (5b) gilt, so kann man aus ihr und aus der Kennlinie des Hauptgrubenlüfters den Wert C des natürlichen Auftriebs bestimmen. Natürlich müssen die Kennlinie des Hauptgrubenlüfters und die Funktion (5b) hinreichend genau durch Messungen ermittelt sein, wenn daraus einigermaßen verläßliche Werte für den natürlichen Auftrieb abgeleitet werden sollen.

Meßpunkt Nr.	Wettermenge x m³/s	Gesamtdruck y kg/m²	$m = \operatorname{tg}\alpha$ kg/m²: m³/s	Zustand des Wetterkanals
1	111	106	—	stark gedrosselt
2	116	76	1,56	schwach gedrosselt
3	125	21	0,56	ohne Drosselung

Auf einer Zeche des Ruhrgebietes ist als Hauptgrubenlüfter ein Axiallüfter (Laufraddurchmesser = 2240, Drehzahl = 650 U/min, Wichte der Wetter = 1,2 kg/m³) aufgestellt, dem ein

[1] *E. Czuber*, Z. Math. Phys. 44 (1899), S. 41.
[2] *W. Schmidt*, Glückauf 88 (1952), S. 859.

verstellbarer Leitapparat vorgeschaltet ist. Eine Betriebsmessung ergab die Kurve H_0 in Abb. 3, für welche aus den Werten die Konstanten $a = -0{,}0079$; $b = -4{,}198$; $c = 669{,}8$ für die durch (3b) angenäherte Kennlinie des Hauptlüfters bestimmt wurden. Nach (5b) folgt dann als Mittelwert für den in diesem Wettermengenbereich als von der Wettermenge unabhängig vorausgesetzten natürlichen Auftrieb der Grube 14 kg/m². Die Grubenweite $A = 0{,}38\, x/\sqrt{y}$ für den Meßpunkt 3 beträgt 10,4 m², wird jedoch vom natürlichen Auftrieb abgesehen, so ist die Grubenweite nur 8 m². Daraus kann man schließen, daß der natürliche Auftrieb allein aus der Grube etwa 79 m³/s Wetter ausziehen würde, wenn am ausziehenden Wetterschacht kein Lüfter stünde. Im Punkte $x = 79$ m³/s würde die Kurve W_3 (Abb. 3) die Mengenachse schneiden, wenn der Regelbereich des Hauptlüfters weit genug wäre. Es herrscht dann unmittelbar vor dem Hauptgrubenlüfter im Wetterkanal Atmosphärendruck.

Das in Abschn. 2 beschriebene allgemeine Verfahren könnte, falls hinreichend genaue Messungen am Hauptgrubenlüfter möglich sind, die Abhängigkeit des natürlichen Auftriebs einer Zeche von der Wettermenge, also seine Kennlinie, zu bestimmen gestatten [1].

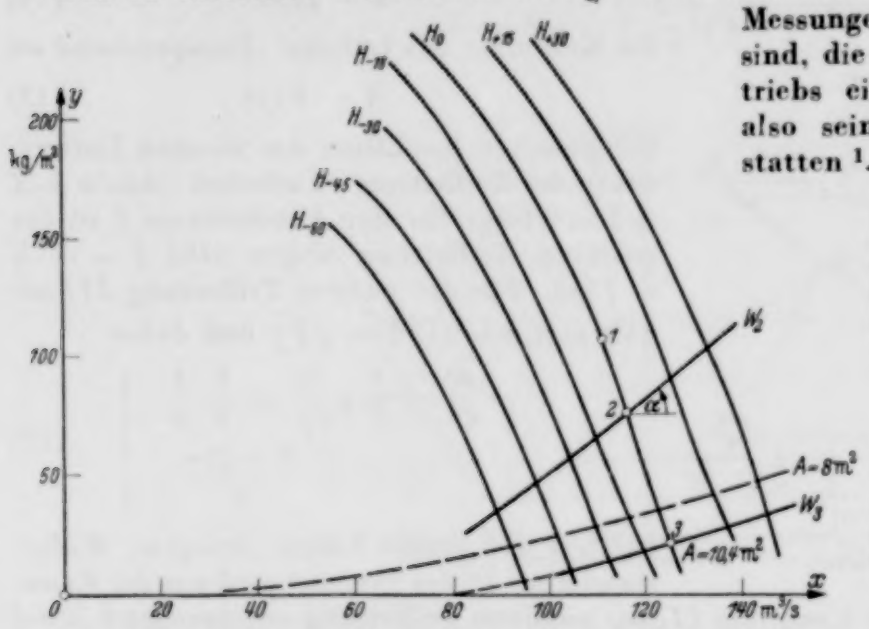

Abb. 3. Natürlicher Auftrieb bei der Grubenbewetterung als Sonderfall der vollständigen Hintereinanderschaltung zweier Lüfter.

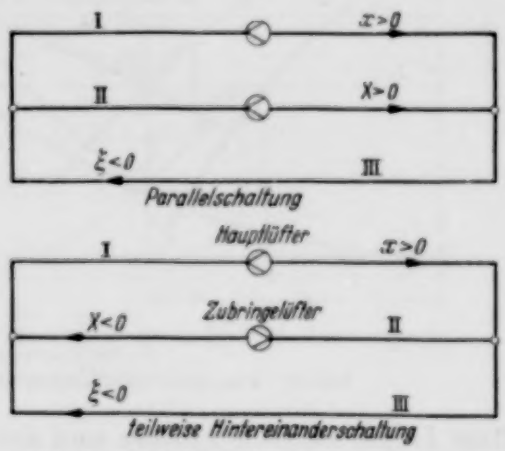

Abb. 4. Zwei Lüfter in einem geschlossenen Kreislauf mit einer Querverbindung.

4. Zwei Lüfter in einem geschlossenen Kreislauf mit einer Querverbindung. Während der geschlossene einfache Kreislauf als Schema für vollständige Hintereinanderschaltung zweier Lüfter gilt, wobei Haupt- und Zubringelüfter völlig gleichwertig sind, es also auch für die indirekte Kennlinienbestimmung nur die eine im Abschnitt 2 besprochene Aufgabenstellung gibt, zeigt Abb. 4 die beiden von der vollständigen Hintereinanderschaltung verschiedenen Möglichkeiten für zwei in einem geschlossenen Kreislauf mit einer Querverbindung arbeitende Lüfter. In den aktiven Teilleitungen *I* und *II* sollen die Förderströme x bzw. X und in der passiven Teilleitung der Förderstrom ξ fließen, für deren Vorzeichen festgesetzt werde, es sei plus oder minus, je nachdem die betreffende Strömung gegen den Punkt gerichtet ist, in welchem das Medium in die passive Teilleitung eintritt oder aus ihr austritt. Daher ist der Förderstrom ξ in der passiven Teilleitung stets negativ. Wenn die Förderströme x und X in beiden aktiven Teilleitungen positiv sind, liegt Parallelschaltung vor. Haben x und X jedoch verschiedene Vorzeichen, so soll von teilweiser Hintereinanderschaltung der beiden Lüfter gesprochen werden, wobei der Lüfter mit positivem Förderstrom Hauptlüfter und der Lüfter mit negativem Förderstrom Zubringelüfter genannt werden soll. Für die Kennlinie einer aktiven Teilleitung sollen positive Förderströme nach rechts und negative nach links auf der Mengenachse aufgetragen werden. Der stets negative Förderstrom ξ in der passiven Teilleitung werde jedoch stets nach rechts aufgetragen.

Es gibt dann drei von der vollständigen Hintereinanderschaltung verschiedene Aufgaben für indirekte Kennlinienbestimmung beim Betrieb von zwei Lüftern in einem Kreislauf mit einer Querverbindung:

---

[1] Auf diese Möglichkeit, aus der Untersuchung eines regelbaren Hauptgrubenlüfters auf die Größe des natürlichen Auftriebs einer Grube zu schließen, wies bereits *W. Schmidt* in einem Vortrag hin. („Die gegenseitige Beeinflussung von Lüftern und Wettersystemen", Techn.-wissenschaftl. Vortragswesen der Bergschule Bochum 20. 11. 51). Mit Herrn *W. Schmidt* wurde die hier behandelte Fragestellung wiederholt besprochen.

a) indirekte Kennlinienbestimmung bei Parallelbetrieb,
b) indirekte Bestimmung der Kennlinie des Zubringelüfters bei teilweiser Hintereinanderschaltung und
c) indirekte Bestimmung der Kennlinie des Hauptlüfters bei teilweiser Hintereinanderschaltung.

Die Festlegung über die Berücksichtigung der Vorzeichen bei den Förderströmen für das Zeichnen der Kennlinien hat zur Folge, daß alle drei Aufgaben völlig identisch sind und daher gleich gelöst werden können.

Die Abb. 5 bezieht sich auf Parallelbetrieb. In der Teilleitung I arbeite der zumindest in einem beschränkten Bereich regelbare Lüfter, dessen Förderstrom x gemessen werden soll.

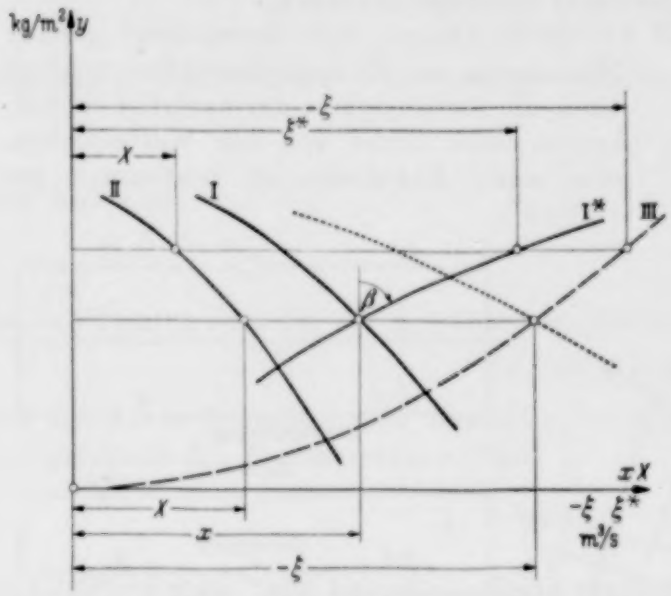

Abb. 5. Parallelbetrieb zweier Lüfter.

Es sei

$$x = f(y) \tag{10}$$

die Kennlinie des Lüfters. Entsprechend sei

$$X = F(y) \tag{11}$$

die gesuchte Kennlinie des zweiten Lüfters, der in der Teilleitung II arbeitet. Aus $x + X + \xi = 0$ folgt für den Förderstrom ξ in der passiven Teilleitung wegen (10) $\xi = -X - f(y)$. Für die passive Teilleitung III erhält man aus (1) $\xi = \varrho\sqrt{y}$ und daher

$$\left.\begin{aligned} \xi' = \frac{d\xi}{dy} &= \frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\,\frac{\xi}{y} \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{X + f(y)}{y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die auf den ersten Lüfter bezogene Widerstandslinie I^* des Systems wird aus der Kennlinie II des zweiten Lüfters und der Kennlinie III der passiven Teilleitung entsprechend $X + \xi + \xi^* = 0$ gefunden. Nach y abgeleitet folgt daraus $X' + \xi' + (\xi^*)' = 0$ und daher wegen (12)

$$X' - \frac{1}{2\,y}\,X + (\xi^*)' - \frac{1}{2\,y}\,f(y) = 0\,.$$

Ähnliche Bedeutung wie (4) hat hier die Funktion

$$(\xi^*)' = \frac{d\xi}{dy} = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = g\,(y)\,. \tag{13}$$

Wenn der eine Lüfter zumindest in einem beschränkten Bereich regelbar ist, und man in der passiven Teilleitung drosseln kann, dann können die Funktionen (10) und (13) durch Messungen am ersten Lüfter bestimmt werden, und man erhält für die Kennlinie des zweiten Lüfters die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$X' - \frac{1}{2\,y}\,X + g(y) - \frac{1}{2\,y}\,f(y) = 0\,, \tag{14}$$

für deren graphische Lösung eine Leitkurve L mit der Parameterdarstellung

$$x_L = 2\,y \cdot g(y) - f(y); \qquad y_L = -\,y \tag{15}$$

verwendet werden kann. Die Punkte der Leitkurve L sind mit den Werten von y zu beziffern. Die Lösungskurven von (14) berühren alle mit einer Ausnahme die Mengenachse in deren Schnittpunkt O mit der Leitkurve L. Weil Lüfterkennlinien jedoch die Mengenachse schneiden, ist die gesuchte Lüfterkennlinie jene Lösungskurve, welche im Punkte O mit der Leitkurve L eine gemeinsame Tangente hat.

Die indirekt zu bestimmende Kennlinie des zweiten Lüfters kann dann durch die Parabel $y = A\,X^2 + B\,X + C$ angenähert werden, wenn die Funktion (13) die Form hat

$$n = g(y) = \frac{1}{2\,y}\left[f(y) - \frac{B}{2\,A} + \frac{\Delta}{2\,A\sqrt{4\,A\,y + \Delta}}\right]. \tag{13a}$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist durch die Bedingung festgelegt, daß $A\sqrt{4\,A\,y + \Delta} \gtrless 0$ mit $\Delta = B^2 - 4\,A\,C$ ist, je nachdem ob der entsprechende Punkt rechts oder links des Parabelscheitels auf $y = A\,X^2 + B\,X + C$ liegt.

Die Parameterdarstellung der Leitkurve L lautet dann

$$x_L = \frac{1}{2\,A}\left[\frac{\Delta}{\sqrt{4\,A\,y + \Delta}} - B\right], \qquad y_L = -\,y\,. \tag{15a}$$

Die Leitkurve hat die beiden Asymptoten $x = -\,B/2\,A$ (parallel zur Druckachse) und y $y = C - B^2/4\,A$ (parallel zur Mengenachse).

Wenn in (14) $g\,(y)$ die Form von (13a) hat, erhält man als Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$X = K\sqrt{y} + \frac{1}{2\,A}\left[\sqrt{4\,A\,y + \Delta} - B\right].$$

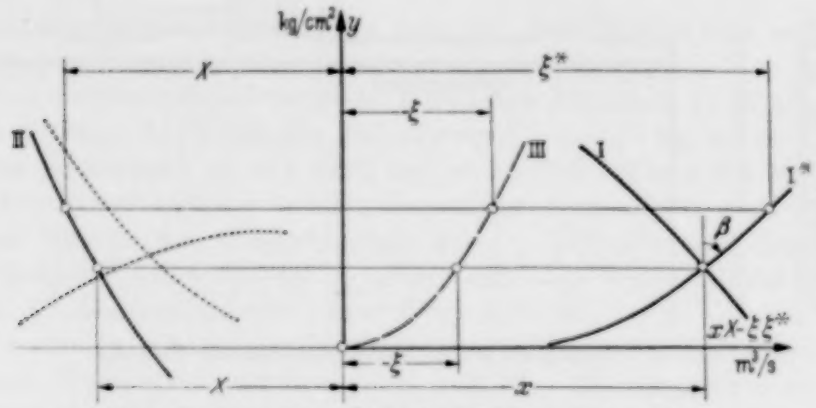

Abb. 6. Teilweise Hintereinanderschaltung zweier Lüfter: Indirekte Bestimmung der Kennlinie des Zubringelüfters.

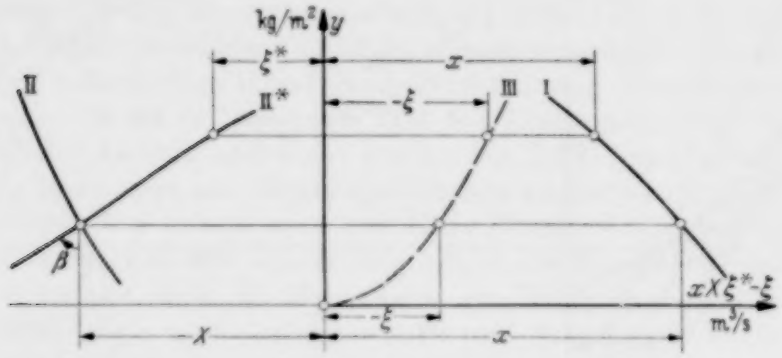

Abb. 7. Teilweise Hintereinanderschaltung zweier Lüfter: Indirekte Bestimmung der Kennlinie des Hauptlüfters.

Für $\Delta = 0$ ist das die Parabelschar

$$\left(X + \frac{B}{2\,A}\right)^2 = K'\,y\,,$$

die für $B \neq 0$ keine als Lüfterkennlinie in Frage kommende Kurve enthält. Für $\Delta \neq 0$ berühren alle Kurven, bei denen $K \neq 0$ ist, die Mengenachse, stellen also keine Lüfterkennlinie dar. $K = 0$ gibt die als Parabel geforderte Lüfterkennlinie

$$y = AX^2 + BX + C\,.$$

Abb. 6 bzw. 7 bezieht sich auf die indirekte Bestimmung der Kennlinie des Zubringelüfters bzw. Hauptlüfters bei teilweiser Hintereinanderschaltung.

5. Beispiel: Natürlicher Auftrieb bei der Grubenbewetterung. Abb. 8 zeigt einen Axiallüfter mit horizontaler Achse (Laufraddurchmesser = 3350, Drehzahl = 450 U/min, Wichte der Wetter = 1,0 kg/m³) als Hauptgrubenlüfter. Die Schachtschleuse war mit einer Drosselwand abgeschlossen, welche durch schrittweisen Abbau verschieden starke Wetterkurzschlüsse von

über Tage gestattete. Auf die durch den ausziehenden Wetterschacht aus der Grube strömenden Wetter wirkt der natürliche Auftrieb der Grube. Bei Kurzschluß von über Tage tritt dieser natürliche Auftrieb anstelle eines Zubringelüfters, der mit dem Hauptgrubenlüfter teilweise hintereinander geschaltet ist. Es liegt daher die in Abb. 6 dargestellte Aufgabe vor, die Kennlinie eines Zubringelüfters bei teilweiser Hintereinanderschaltung aus Messungen am Hauptlüfter indirekt zu bestimmen. H_0, H_{+15} bzw. H_{-15} in Abb. 9 sind die für den Hauptgrubenlüfter gemessenen Kennlinien bei den Einstellungen 0°, + 15° bzw. —15° des dem Haupt-

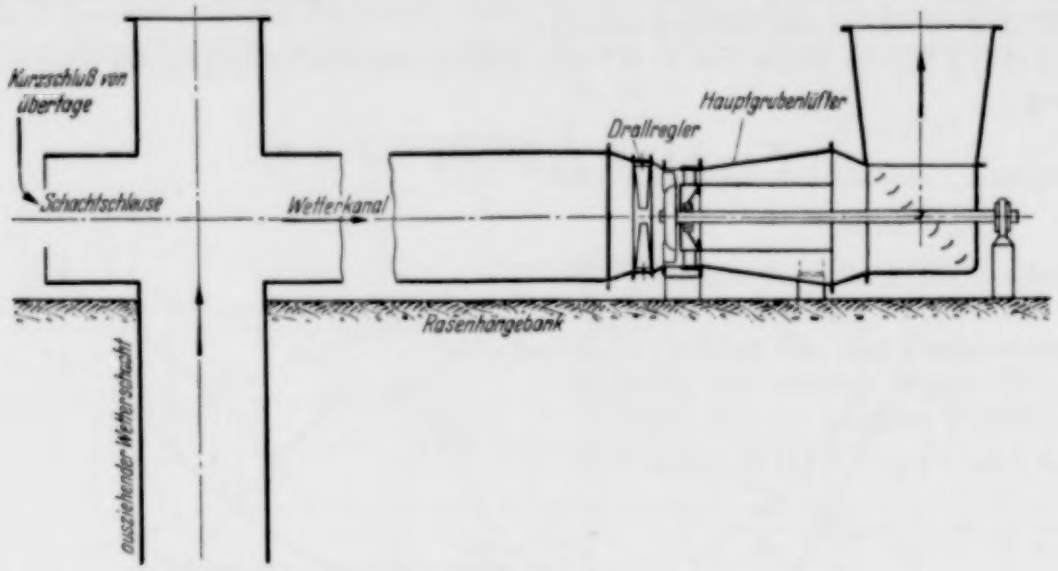

Abb. 8. Hauptgrubenlüfter mit Kurzschluß von Übertage.

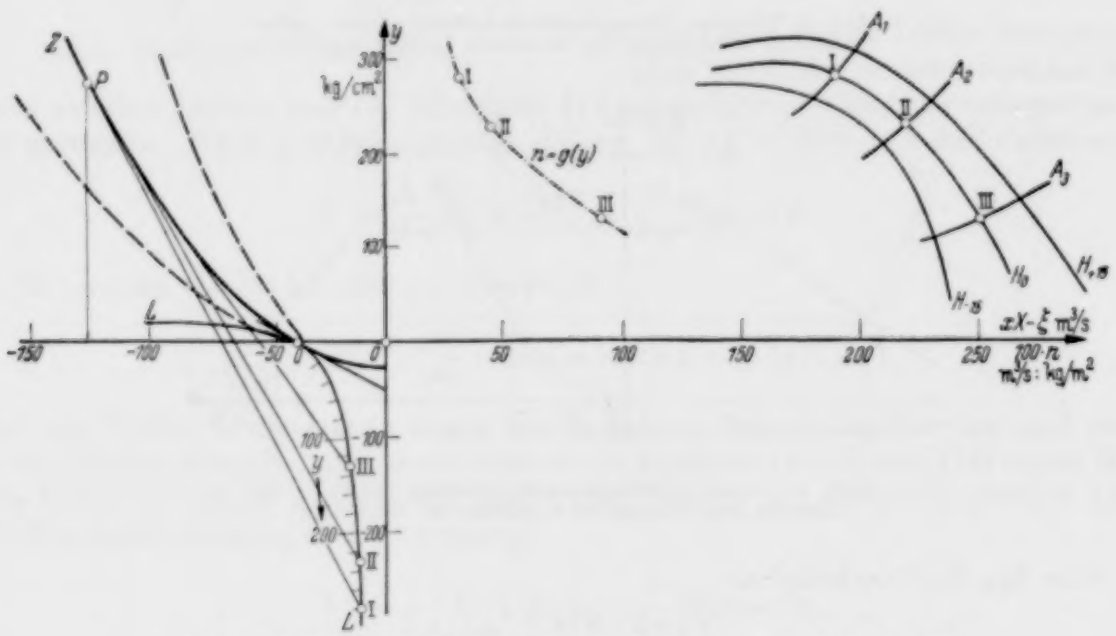

Abb. 9. Natürlicher Auftrieb bei der Grubenbewetterung als Sonderfall der teilweisen Hintereinanderschaltung zweier Lüfter.

grubenlüfter vorgeschalteten, verstellbaren Leitapparates. Für drei verschiedene Drosselstellungen an der Schachtschleuse wurden die Kurven A_1, A_2 bzw. A_3 bestimmt. Aus den Werten

Meßpunkt Nr.	Wettermenge $x = f(y)$ m³/s	Gesamtdruck y kg/m²	$n = \operatorname{tg}\beta = g(y)$ m³/s : kg/m²
1	190	280	0,321
2	220	230	0,454
3	250	130	0,904

wurde nach (15) die Leitkurve L gezeichnet. Drei der mit ihrer Hilfe bestimmten Lösungskurven von (14) sind in Abb. 9 eingetragen. Die einzige Lösungskurve Z, die im Schnittpunkt O der Leitkurve L die Mengenachse nicht berührt sondern schneidet, hat im Punkt O mit der

Leitkurve L gemeinsame Tangente. Wenn außer durch den natürlichen Auftrieb innerhalb der Grube den Wettern keine Energie zugeführt wird, also kein Untertagelüfter eingesetzt ist, und der Wert C des natürlichen Auftriebs in dem betrachteten Wettermengenbereich von der Wettermenge unabhängig ist (was genau sicher nicht richtig ist; s. Abschn. 3), so muß Z eine Parabel $y = AX^2 + C$ sein, deren Achse mit der Druckachse zusammenfällt. In diesem Sonderfall ist also in (13a) und (15a) speziell $B = 0$. Aus der Paremeterdarstellung (15a) der Leitkurve L folgt daher für die Leitkurve die Gleichung

$$x_L^2 (y_L + C) + \frac{C^2}{A} = 0 .$$

Die Druckachse $x_L = 0$ und die Parallele zur Mengenachse $y_L = -C$ sind Asymptoten der Leitkurve L. Aus (13a) folgt in diesem Sonderfall

$$g(y) = \frac{1}{2y}\left[f(y) + \frac{C}{\sqrt{A}\sqrt{y - C}}\right],$$

woraus man A und C bestimmen kann, wenn man für zwei Werte von y die Funktionen $f(y)$ und $g(y)$ kennt.

Für das angegebene Zahlenbeispiel ergab sich aus den Punkten *I*, *II* und *III* der Kennlinie für den Wert des natürlichen Auftriebs der Mittelwert $C = -25$ kg/m² und für die die Grubenweite kennzeichnende Konstante $A = 0{,}0192$ kg/m² : m⁶/s². Wenn die Schachtschleuse dicht geschlossen ist, also kein Kurzschluß von über Tage einströmt, erhält man den Betriebspunkt P. Aus den zugehörigen Werten der Wettermenge $x = -125$ m³/s und des Gesamtdruckes im Wetterkanal $y = 276$ kg/m² folgt für die Grubenweite der Wert 2,86 m². Ohne natürlichen Auftrieb erhält man für die Grubenweite den Wert 2,74 m².

Auch hier könnte das in Abschn. 4 beschriebene allgemeine Verfahren, falls hinreichend genaue Messungen am Hauptgrubenlüfter vorliegen, die Abhängigkeit des natürlichen Auftriebs einer Zeche von der Wettermenge, d. h. die Kennlinie des natürlichen Auftriebs, zu bestimmen gestatten.

6. Zusammenfassung. Wenn in einem einfachen geschlossenen Leitungssystem mit einer Querverbindung zwei Lüfter arbeiten, so können drei wesentlich von einander verschiedene Betriebsarten vorliegen: vollständige Hintereinanderschaltung, Parallelschaltung und teilweise Hintereinanderschaltung. Wenn im passiven Teil des Leitungssystems verschiedene Drosselzustände eingestellt werden können und einer der beiden Lüfter zumindest in einem begrenzten Bereich regelbar ist, so kann man aus Messungen dieses Lüfters auf die Kennlinie des zweiten Lüfters schließen. Insbesondere erhält man auf diese Weise zwei verschiedene Möglichkeiten, den natürlichen Auftrieb einer Grube durch Messungen am Hauptgrubenlüfter zu bestimmen. Ihre Anwendung setzt voraus, daß die Messungen am Hauptgrubenlüfter mit hinreichender Genauigkeit möglich sind. Es wurden zeichnerische und graphische Verfahren angegeben und an praktischen Beispielen erläutert.

Eine praktische Verwendung empfiehlt sich ganz allgemein, nicht nur bei der Grubenbewetterung, nur dann, wenn man die Kennlinie des zweiten Lüfters aus irgend einem Grunde nicht direkt bestimmen kann.

(Eingegangen am 23. Dezember 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Wilhelm Richter*, Frankenthal, Beindersheimer Str. 131.

Handbuch des Wasserbaues. Von Dipl.-Ing., Dr. techn., Dr.-Ing. h. c. **A. Schoklitsch,** Professor der Universidad Nacional de Tucumán, Argentinien. In zwei Bänden. Zweite, neubearbeitete Auflage. (Springer-Verlag, Wien).

Erster Band: Mit 722 Textabbildungen und 87 Zahlentafeln. X, 478 Seiten. 1950.

Zweiter Band: Mit 1327 Textabbildungen und 26 Zahlentafeln. VIII, 594 Seiten. 1952. Das Werk wird nur geschlossen abgegeben. Ganzleinen DM 155.40

Der Grundbau. Ein Handbuch für Studium und Praxis. Von Dipl.-Ing., Dr. techn., Dr.-Ing. h. c. **Armin Schoklitsch,** Professor der Universidad Nacional de Tucumán, Argentinien. Zweite, neubearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 782 Textabbildungen und 43 Zahlentafeln. XII, 457 Seiten. 1952. (Springer-Verlag, Wien.) Ganzleinen DM 87.—

Grund- und Wasserbau in praktischen Beispielen. Von Professor Dr.-Ing. **Otto Streck.**

Zweiter Band: **Fließende und schwingende Wasserbewegung, Wehre, Wasserauflaufen, Bewässerung, Entwässerung, Wasserwirtschaft.** Mit 361 Abbildungen und 2 Tafeln. XII, 700 Seiten. 1950. Ganzleinen DM 45.—

Bodenuntersuchungen für Ingenieurbauten. Von Dr.-Ing. habil. **Edgar Schultze,** ord. Professor an der Technischen Hochschule Aachen, Direktor des Instituts für Verkehrswasserbau, Grundbau und Bodenmechanik, und Dr.-Ing. **Heinz Muhs,** Geschäftsführer der Deutschen Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik (Degebo), Technische Universität Berlin. Mit 498 Abbildungen. XI, 464 Seiten. 1950. Ganzleinen DM 43.50

Handbuch für die Berechnung von Kanälen, Leitungen und Durchlässen des Wasserbaues. Bearbeitet und herausgegeben von **E. Wild,** Leitender Stadtbaudirektor a. D. der Groß-Berliner Stadtentwässerung, Berlin, unter Mitwirkung von **O. Schöberlein,** Magistratsbaurat a. D., Berlin. Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 11 Tafeln und 24 Abbildungen. VII, 97 Seiten. 1952. Ganzleinen DM 28.50

Grundlagen der Wasserwirtschaft und Gewässerkunde. Von Professor Dr.-Ing. **Otto Streck.** Mit 291 Abbildungen. X, 466 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 43.50

Gewässerkunde. Von Dr. **Walter Wundt,** Honorarprofessor an der Universität Freiburg i. Br., Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher in Halle a. d. S. Mit 185 Abbildungen. VI, 320 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 34.50

SPRINGER-VERLAG/BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Die Asynchronmaschine. Ihre Theorie und Berechnung unter besonderer Berücksichtigung der Keilstab- und Doppelkäfigläufer. Von Professor Dr.-Ing. **Werner Nürnberg.** Mit 227 Abbildungen und sechs durchgerechneten Beispielen. VII, 407 Seiten. 1952. Ganzleinen DM 43.50

Aus den Besprechungen: Das Buch gehört zu den Standardwerken über die Asynchronmaschine. Es wendet sich in gleicher Weise an den theoretisch wie praktisch tätigen Ingenieur, dem es in allen Einzelfragen Auskunft geben kann. Aber auch für den Studierenden, der seine Studien ernsthaft vertiefen will, ist es ein hervorragender Wegweiser. Nachdem zunächst Aufbau und Wirkungsweise des Asynchronmotors sowie dessen grundsätzliche Berechnung physikalisch erläutert werden, sind in eigenen Abschnitten die Wicklungen, das Wechselfeld und Drehfeld, der Leerlauf, der Kurzschluß und die Verluste behandelt sowie die Asynchronmaschine mit stromverdrängungsfreiem Schleifring- und Kurzschlußanker. Dann folgt eine eingehende Anleitung für Entwurf und Bemessung des Asynchronmotors. Im Anschluß an die Behandlung der „klassischen" Asynchronmaschine folgt die Asynchronmaschine mit Käfiganker aus rechteckigen oder keilförmigen Hochstäben, ferner der Doppelkäfigmotor, die polumschaltbaren Maschinen und der Einphasenmotor. 6 verschiedene Berechnungsbeispiele schließen die ausgezeichneten Darstellungen ab. „Glasers Annalen".

Die Prüfung elektrischer Maschinen. Von Professor Dr.-Ing. **W. Nürnberg.** Zweite, durchgesehene Auflage. Mit 219 Abbildungen. VIII, 355 Seiten. 1948. DM 24.—

Aus den Besprechungen: Das Buch ist als wertvoller Helfer zu bezeichnen, nicht nur für diejenigen, die sich praktisch mit der Prüfung elektrischer Maschinen zu befassen haben, sondern auch für diejenigen, die sich in das Gebiet einarbeiten wollen. Der Verfasser des Buches spricht aus eigener reicher Erfahrung und konnte so eine Fülle von Hinweisen geben, die an anderen Stellen kaum zu finden sind. Es werden alle gängigen Maschinenarten behandelt; die beigefügten Schaltbilder und Arbeitsdiagramme geben einen guten Einblick in Aufbau und Wirkungsweise der Maschinen. Daher kann auch der Studierende das Buch mit Vorteil benutzen. . . „Elektrotechnik".

Das elektrische Widerstandsschweißen. Von Dipl.-Ing. **Walter Brunst,** Stuttgart-Ditzingen. Mit 408 Abbildungen. VIII, 290 Seiten. 1952. Ganzleinen DM 42.—

Aus den Besprechungen: . . . Es ist dem Verfasser gelungen, eine umfassende Darstellung des heute außerordentlich wichtigen Gebietes der Widerstandsschweißung zu geben. Das Werk darf wirklich als „up to date" bezeichnet werden, finden wir darin doch auch sehr spezielle Fragen wie Schweißbarkeit, Energie-Speichermaschinen, Lastausgleichgeräte, Druck- und Stromprogramme usw. behandelt. Dieses Buch wird deshalb dem Fachmann als Nachschlagewerk und dem Studenten als Lehrbuch wertvolle Hilfe leisten. . . „Schweizerische Bauzeitung".

Elektrische Maschinen. Eine Einführung in die Grundlagen. Von Prof. Dr.-Ing. **Theodor Bödefeld,** Berlin, und Prof. Dr. techn., Dr.-Ing., Dr. phil. **Heinrich Sequenz,** Wien. Fünfte Auflage mit Ergänzungen. Mit 655 Abbildungen. XXVI, 502 Seiten. 1952. (Springer-Verlag, Wien.) DM 25.50; Ganzleinen DM 28.50

Berechnung magnetischer Felder. Von Dr.-Ing., Dipl.-Ing. **Franz Ollendorff,** Professor der Elektrotechnik und Vorstand des Elektrotechnischen Laboratoriums der Hebräischen Technischen Hochschule Haifa, Mitglied des wissenschaftlichen Forschungsrates für Israel. (Technische Elektrodynamik, Band I). Mit 287 Textabbildungen. X, 432 Seiten. 1952. (Springer-Verlag, Wien.) Ganzleinen DM 66.—

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen 3 Prospekte des Springer-Verlages, Berlin·Göttingen·Heidelberg, bei.

Springer-Verlag / Berlin·Göttingen·Heidelberg. Printed in Germany, W 57 275 4022 0.8 K. B./Z. 040